


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ



EXERCICES ET PROBLÈMES

D'ALGÈBRE

RECUEIL GRADUÉ

PAR

S. TZAUT

PROFESSEUR A L'ÉCOLE INDUSTRIELLE CANTONALE ET AU COLLÈGE GALLIARD A LAUSANNE,
ANCIEN AUDITEUR EXTERNE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS

In scientiis addiscendis, exempla magis
prosunt quam præcepta. NEWTON.

DEUXIÈME SÉRIE

RÉPONSES



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

1881

EXERCICES ET PROBLÈMES d'ALGÈBRE, recueil gradué, par *C. Morf* et *S. Tzaut*, première série, allant jusqu'aux équations du premier degré inclusivement. Ouvrage recommandé par les Départements de l'Instruction publique des cantons de Vaud et de Fribourg; 1 vol. in-12 renfermant plus de 3800 exemples. . . . Fr. 3.—

RÉPONSES aux Exercices de la première série, 1 vol. in-12 . . . . Fr. 2.—

EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGÈBRE, recueil gradué, par *S. Tzaut*. Des radicaux et des équations du second degré au binome et aux déterminants inclusivement. 1 vol. in-12 renfermant plus de 6200 exemples. Fr. 3.50

RÉPONSES aux exercices de la seconde série, 1 vol. in-12, Fr. 3.75



LAUSANNE. — IMPRIMERIE ED. JAUNIN

PRÉFACE

Le présent volume ne contient en général que la réponse aux Exercices et problèmes proposés dans la seconde série ; on n'y trouvera pas le détail des solutions. Toutefois le désir d'être utile à ceux qui travaillent seuls m'a engagé à me départir de cette règle dans certains cas, où l'élève serait embarrassé, et peut-être entraîné à des tâtonnements décourageants. Mais à côté des questions pour lesquelles on trouvera indiquée succinctement la marche à suivre pour arriver à la solution, se trouvent presque toujours des exercices du même genre où la réponse seule est donnée, ensorte que le professeur qui préfèrera que l'élève soit laissé à ses seules forces pourra toujours choisir parmi ces dernières questions les devoirs à faire en dehors de la classe.

Les plus grands soins ont été apportés à la révision des calculs et à la correction des épreuves. Sans me flatter d'avoir évité toutes les erreurs, j'ose espérer pourtant qu'il en sera resté très peu, en dehors de celles que signale l'errata, et je serai reconnaissant envers tous les lecteurs qui voudraient bien me signaler celles qu'ils découvriraient.

Lausanne, le 31 janvier 1881.

S. TZAUT.

ERRATA

Page 9, Exercice 52 du paragr. IX, au numérateur, au lieu de c^{m3}, lire c^{3m}.

33, Ex. 40, 3e terme, au lieu de $\sqrt[mnp]{\left(\frac{x-1}{x+p}\right)^{mn}}$, lire $\sqrt[mnp]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{mn}}$.

35, » 34, au lieu de $\frac{a^2+b^2}{-ab}\sqrt{a-b}$, lire $\frac{a^2+b^2}{a-b}\sqrt{a-b}$.

37 » 41, premier terme, lire $\frac{1}{6}\sqrt{30}$.

54 » 137, seconde forme, dernier terme du numérateur, au lieu de $-y^8\sqrt{y}$, lire $-y^8\sqrt[3]{y}$.

62 » 80, deuxième terme, au lieu de $-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{3a^{\frac{1}{2}}}$, lire $-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}$.

63 » 82, au lieu de $-3c^{\frac{1}{5}}\sqrt{-1}$, lire $+3c^{\frac{1}{5}}\sqrt{-1}$.

80 » 122, seconde racine, lire $\frac{6b^{-n}c^{-1}}{a^{-m}}$.

» » 136, illisible; il faut : $a+cd\pm2\sqrt{acd}$.

87 » 38, 3e racine, au lieu de $\pm i$, lire $\pm 8i$.

93 » 55, 14e ligne, au lieu de $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{8}$, lire $\frac{-3\pm5\sqrt{5}}{8}$.

98 » 113, dern. ligne, le premier facteur du second membre doit être $\sqrt[5]{(a^2-x^2)^2}$, et non $\sqrt{(a^2-x^2)^2}$.

99 » 10, dern. réponse, au lieu de ± 2, lire ± 21.

» » 19, au lieu de 96, 6, lire 96,66.

151 » 59, lire $d=3\frac{7}{23}$; n° 63, lire $d=-13\frac{2}{11}$.

158 » 5, au lieu de fr. 6 343,89, lire fr. 6 132,69.

176 » 134, dernière valeur de x, au lieu de 9, lire -9.

» » » prem. valeur de y, au lieu de -15, lire -17.

204 » 119, 2e terme, au lieu de $+7y^4\sqrt{5^5y^{12}}$, lire $+7y^4\sqrt[15]{5^5y^{12}}$.

205 » avant-dernière ligne, lire : des coefficients de rang pair égale celle des coefficients etc.

207 » 8, dans la 1re parenthèse, au lieu de $1+\frac{2}{17}$, lire $1+\frac{2}{27}$.

212 » 53, dernier terme, au dénominateur, au lieu de $19\,683x^{23}$, lire $19\,683a^{23}$.

221 » 16, au lieu de c^3, lire c_3.

CHAPITRE PREMIER

PUISSANCES

I. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS ENTIERS POSITIFS

I

1. $3^6 = 729$. **2.** $5^7 = 78\,125$. **3.** $8^7 = 2\,097\,152$.
4. $9^5 = 59\,049$. **5.** $10^9 = 1\,000\,000\,000$. **6.** 57.
7. 407. **8.** 1056. **9.** 320. **10.** 79. **11.** 440.
12. 30. **13.** — 13 776. **14.** 16. **15.** 1296. **16.** 1296.
17. — 125. **18.** 125. **19.** — 625. **20.** — 1. **21.** 1.
22. — 1. **23.** 1. **24.** 4221. **25.** — 3425. **26.** 1377.
27. 4128. **28.** — 91. **29.** — 32 425. **30.** — 3124.
31. 10 000 001. **32.** — 368. **33.** 192. **34.** 1844.
35. — 180. **36.** 180. **37.** 657. **38.** 59 497.
39. — 255. **40.** — 247. **41.** x^{n+1}. **42.** m^a.
43. a^x. **44.** b^{m-1}. **45.** d^{a+1}. **46.** y^m. **47.** e^x. **48.** c^a.
49. a^{3m}. **50.** b^{m+n}. **51.** a^{5x-2y}. **52.** p^{a+6b}.
53. $(a+b)^{m+n}$. **54.** $(x-y)^m$ **55.** $(p+q)^a$. **56.** $a^{2x} - b^{2y}$.
57. $a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n}$. **58.** $m^{2x} - 2m^x n^y + n^{2y}$.
59. $m^{12} - n^{2x}$. **60.** $p^{2(m-1)} + 2p^{m-1}q^{n-2} + q^{2(n-2)}$.
61. $z^{2(3m-2n)} + 2z^{3m-2n}u^n + u^{2n}$.
62. $a^{3m} + 3a^{2m}b^n + 3a^m b^{2n} + b^{3n}$.
63. $x^{3a} - 3x^{2a}y^b + 3x^a y^{2b} - y^{3b}$.

64. $p^{3(r+s)} + 3p^{2(r+s)}q^t + 3p^{r+s}q^{2t} + q^{3t}$.
65. $8a^{3(m+3)} - 36a^{2(m+3)}b^{2n-1} + 54a^{m+3}b^{2(2n-1)} - 27b^{3(2n-1)}$.
66. $m^{2a} + 2m^a n^b + 2m^a p^c + n^{2b} + 2n^b p^c + p^{2c}$.
67. $4a^{2m} - 12a^m b^{n+1} - 16a^m c^{2p} + 9b^{2(n+1)} + 24b^{n+1}c^{2p} + 16c^{4p}$.
68. $x^{2(2n+1)} - 4x^{2n+1}y^{3m+2} + 2x^{2n+1}z^{m+n} + 4y^{2(3m+2)} -$
$4y^{3m+2}z^{m+n} + z^{2(m+n)}$.
69. $x^{4n} - x^{4m}$. 70. $p^{4a-8b} - p^{12a-16b}$.
71. $m^{p+q}n^q - 4m^{p+q-1}n^{2q} - 27m^{p+q-2}n^{3q} + 42m^{p+q-3}n^{4q}$.
72. $a^{y(x+1)-1} - a^y b^{xy-1} - a^{xy-1}b^x + b^{x(y+1)-1}$.
73. $a^{2m} - b^2 a^{2(m-1)}x^2 + 2bca^{2m-3}x^3 - c^2 a^{2(m-2)}x^4$.
74. $25a^{2(m-2)}c^2 x^{2(n+1)} - a^{2m}x^{2n} + \frac{6a^{m+1}x^n}{y} - \frac{9a^2}{y^2}$.
75. $\frac{a(1+b)}{b^x}$. 76. $\frac{b^{p-1}c}{(b+c)^q}$. 77. $\frac{pm^{x-1}}{(m-p)^x}$. 78. $\frac{4x^c y^c}{x^{2c} - y^{2c}}$.
79. $\frac{m^q x + m^t y + m^u z - v}{m^p}$.
80. $\frac{x^{2(a+b+c)} - x^{2(a+c)} + x^{2(a+b)} - x^{2(a-c)} + x^{2(a-b)} - x^{2(a-b+c)}}{x^{2(a-c)} - x^{2(a+c)}}$.
81. a^8. 82. $-x^9$. 83. b^8. 84. $-m^{2p+1}$.
85. y^{2n+4}. 86. d^{2n+4}. 87. $c^{2(m+n)}$. 88. $-a^{2m+7}$.
89. h^{13}. 90. $-m^{2p+7}$. 91. x^{2m+6}. 92. $-a^9b^9$.
93. $-c^{2m+2n-1}d^{2m+2n-1}$. 94. $x^{2n+2}y^{2n+2}$. 95. $-\frac{x^{15}}{y^{15}}$.
96. $\frac{a^{10}}{b^{10}}$. 97. $-\frac{n}{m}$. 98. $-\frac{b^{12}}{x^3c^9}$.
99. $-\frac{x}{y}$. 100. $\frac{n^2}{m^2}$. 101. $-\frac{a^{19}x^3}{b^3y^{19}}$.

II

1. 10^8. 2. 1000^7. 3. 100^3. 4. 100^6.
5. $10^{10} \times 25$. 6. 8.1000^5. 7. 4.100^7. 8. 8.100^5.
9. 21^8. 10. 738^5. 11. 8700^5. 12. 2040^4.
13. $4^6 = 4096$. 14. $2^{10} = 1024$.
15. $0{,}013\,872\,6^4 = 0{,}000\,000\,037\,03$.

16. $26^5 = 13^5.2^5 = 371\ 293.32 = 11\ 881\ 376.$

17. $92^4 = 23^4.4^4 = 71\ 639\ 296.$

18. $12^{10} = 6^{10}.2^{10} = 60\ 466\ 176 \times 1024 = 61\ 917\ 364\ 224.$

19. $(625a^4 - 1296b^4)^p.$ **20.** $\left(\frac{p+q}{m-n}\right)^x.$ **21.** $\left(\frac{25x}{2y}\right)^a.$

22. $\frac{625m^5}{384n^2}.$ **23.** $10^{2p}.\ a^{3p+2}.\ b^{4p}.\ c^{3p-2}.$ **24.** $\left(\frac{m-5}{7-c}\right)^2.$

25. $\left(\frac{x-y}{m-p}\right)^2.$ **26.** $\frac{a-8}{x-y}.$ **27.** $\left(\frac{h-m}{c-d}\right)^4.$

28. $-\frac{a-b}{x-y}.$ **29.** $\frac{a-b}{x-y}.$ **30.** $\frac{(5y)^{2m}}{(m-1)^{2m-1}.\ (4-y)}.$

31. $-\left(\frac{x^4-y^4}{a^2-b^2}\right)^2.$ **32.** $\frac{x^6-y^6}{a^2-b^2}(x^3+y^3)^3.$

33. $\left(\frac{a^2+b^2}{x^3+y^3}\right)^5\left(\frac{x^3-y^3}{a^2-b^2}\right)^2.$ **34.** $(x^5+y^5)^m.\ (m^8-n^8)^m.$

III

1. $a^{12}.$ **2.** $b^{30}.$ **3.** $x^{8n}.$ **4.** $x^{3p+3}.$ **5.** $x^{2m+2}.$

6. $a^6.$ **7.** $-a^6.$ **8.** $-m^{21}.$ **9.** $y^{6m}.$ **10.** $-y^{12m+3}.$

11. $-y^{6m}.$ **12.** $y^{6m}.$ **13.** $-b^{4m-2}.$ **14.** $b^{4m-2}.$

15. $-b^{2n(n-1)}.$ **16.** $b^{2n(n-1)}.$ **17.** $a^9b^6.$ **18.** $a^{30}b^{42}.$

19. $m^{5n}p^5.$ **20.** $25a^{2n-2}b^4.$ **21.** $27a^9b^{3n-6}.$

22. $64a^{3m-3}b^{3n+3}.$ **23.** $343a^6x^{3n-6}y^{3m+3}.$ **24.** $512a^{3n}b^{3n-3}c^{3n-6}.$

25. $\frac{a^4b^6}{c^8d^{10}}.$ **26.** $\frac{27x^3y^9}{64m^6n^{15}}.$ **27.** $\frac{a^{27}b^{84}c^{141}}{d^{30}e^{87}}.$ **28.** $\frac{64a^{3n}b^{3n-3}}{27c^{6n}d^{9n-3}}.$

29. $a^3x^7.$ **30.** $m^{9-q}n^{15-q}.$ **31.** $\frac{1}{b^3}.$ **32.** $\frac{1}{a^8b^2}.$

33. $abcde.$ **34.** $\left(\frac{8x-6y}{4x-3y}\right)^{10a^2} = 1024^{a^2}.$

35. $(ax)^{15y^2+2yz-24z^2}.$ **36.** $\frac{8a^{n-2}b^4c^{4-m}}{27x^3y^{4n-2}z^8}.$ **37.** $p^{13a^2-19ab-4b^2}.$

38. $\frac{a^{24x^2-60xy+24y^2}}{a^{36x^2-96xy+63y^2}} = \frac{a^{36xy}}{a^{12x^2+39y^2}}.$ **39.** $\frac{m^{16}q^{39}}{n^{12}p^2}.$ **40.** $\frac{a^{20}c^3x^6}{b^9}.$

41. $(x^m+x^n)(x^m-x^n).$

42. $(x^m - x^n)(x^{2m} + x^{m+n} + x^{2n})$.

43. $(a^x - a^y)(a^x + a^y)(a^{2x} + a^{2y})$.

44. $(a^x - b^y)(a^{4x} + a^{3x}b^y + a^{2x}b^{2y} + a^x b^{3y} + b^{4y})$.

45. $\left(\frac{a^m}{b^m} + \frac{x^n}{y^n}\right)\left(\frac{a^m}{b^m} - \frac{x^n}{y^n}\right)$.

46. $\left\{\left(\frac{3ab}{d}\right)^{2x} + \left(\frac{4cd}{m}\right)^{2y}\right\}\left\{\left(\frac{3ab}{d}\right)^{x} + \left(\frac{4cd}{m}\right)^{y}\right\}\left\{\left(\frac{3ab}{d}\right)^{x} - \left(\frac{4cd}{m}\right)^{y}\right\}$.

47. 16 777 216. **48.** 262 144. **49.** 14 348 907.

50. 476 837 158 203 125. **51.** 1331 approx[t]. **52.** 1331 approx[t].

IV

1. c^{x-1}. **2.** c^{x-3}. **3.** c^{2x}. **4.** m^x.

5. m^{y-1}. **6.** m^x. **7.** x^{a-3b}. **8.** x^{2b}.

9. $x^{2(a-b)}$. **10.** a^{x+5y}. **11.** b^{6z-y}. **12.** m^{p+2q}.

13. $(a+b)^{m-1}$. **14.** $(m+n)^{p-q}$. **15.** $(x+y)^{2(a-b)}$.

16. $x^{17m-13n}y^{4m+9n}$. **17.** $a^{4x+2y}b^{20y-11x}$. **18.** $a^{p-q}b^{p+q}$.

19. $x^{3p} + x^{2p} + x^p + 1$.

20. $x^{5r} + x^{4r}y^r + x^{3r}y^{2r} + x^{2r}y^{3r} + x^r y^{4r} + y^{5r}$.

21. $a^{12p} - a^{9p}b^{2q} + a^{6p}b^{4q} - a^{3p}b^{6q} + b^{8q}$.

22. $x^{4d} + 3x^{3d} + 9x^{2d} + 27x^d + 81$.

23. $a^{2m} - 2a^m x^n + 4x^{2n}$. **24.** $2 - x^p + 3x^{2p}$.

25. $a^{4x-8y} + 4a^{3x-6y}b^{x+3y} + 12a^{2x-4y}b^{2x+6y} + 16a^{x-2y}b^{3x+9y}$
$+ 16b^{4x+12y}$.

26. $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$.

27. $a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}$.

28. $a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}$.

29. $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1$.

30. a^n.

V

1. $4^7 = 16\,384$. **2.** $3^3 = 27$. **3.** $\frac{243}{32}$.

4. $\frac{1}{64}$. **5.** 1331. **6.** 1024.

7. 146 410 000. **8.** 16 807. **9.** $17^4 = \frac{51^4}{3^4} = 83\,521$.

10. $0{,}606^{20} = \left(\frac{1{,}818}{3}\right)^{20} = \frac{155\,553}{3\,486\,784\,401} = 0{,}000\,044\,61$.

11. $\left(\frac{2}{3}ac^2\right)^n$. **12.** $\left(\frac{3c^2dfg}{4a^2}\right)^p$.

13. $(5a^2 - 3b^2)^x$. **14.** $(8m + 7n)^b$.

15. $(3^6)^x + (3^5)^x + (3^4)^x + (3^3)^x + (3^2)^x + 3^x + 1$, ou bien
$729^x + 243^x + 81^x + 27^x + 9^x + 3^x + 1$.

16. 64. **17.** 64. **18.** 243.

19. $\frac{2mn^6}{15pq^6}$. **20.** $\frac{p-q}{27(m+n)^3}$. **21.** $\frac{(a+b)^{5m-4}}{c^{m+3}d^{2m-5}f^{2m-7}}$.

II. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS ENTIERS NÉGATIFS

VI

1. 1. **2.** $\frac{1}{a^3}$. **3.** 1. **4.** a^4. **5.** $\frac{1}{x^0} = 1$.

6. 1. **7.** a^3. **8.** a^3. **9.** $a^5.q^0 = a^5$. **10.** $\frac{1}{m^3}$.

11. $\frac{1}{m^3}$. **12.** $\frac{1}{m^3}$. **13.** b^m. **14.** b^m. **15.** $\frac{b^m}{d^5}$.

16. 1. **17.** 1. **18.** 1. **19.** 2. **20.** 2.

21. 1. **22.** 0. **23.** 2. **24.** 1. **25.** ∞.

26. ∞. **27.** $\frac{1}{a^2}$. **28.** $\frac{1}{x^4}$. **29.** $-\frac{1}{x^3}$. **30.** $-\frac{1}{x^{15}}$.

31. a^5. **32.** m^2. **33.** -1. **34.** 1. **35.** 1.

36. $\frac{1}{b^n}$. **37.** b^n. **38.** $\frac{1}{x^n}$. **39.** $\frac{1}{x^n}$. **40.** $\frac{n^3}{m^5}$.

41. $\left(\frac{b}{a}\right)^x$. **42.** $\frac{b^n}{a^m}$. **43.** $\frac{1}{m}$. **44.** a^{n+1}.

45. $\frac{p}{p^m} = \frac{1}{p^{m-1}}$. **46.** $\frac{a^mb^3}{a^2b^n}$. **47.** n^4. **48.** $\frac{y}{x}$.

49. 1. **50.** 1. **51.** $\frac{1}{a}$. **52.** q^2.

53. $\frac{m}{1-m}$. **54.** n. **55.** $\frac{1}{1-x}$. **56.** $\left(\frac{1}{1-y}\right)^2$.

57. $(m-n)^4$. **58.** $\frac{1}{(1-a)^3}$. **59.** $\frac{3}{5}abc$. **60.** $\frac{y^4}{5x^2}$.

61. $\frac{1}{b^2c^3}$. **62.** $\left(\frac{y}{x}\right)^2$. **63.** a^3. **64.** $\frac{m^xn^3}{mn^x}$.

65. $\frac{a^6}{a^{4x}}$. **66.** $\left(\frac{m^5n^3}{m^{3x}n^3 - m^5n^{5x}}\right)^x$. **67.** $\left(\frac{b^{2y} - a^{3x}}{a^{3x}b^{2y}}\right)^3$.

68. $\left(\frac{x^my^n}{x^3y^n + x^my^4}\right)^2$. **69.** $\frac{a^4b^4}{(b+a)^3(b-a)}$. **70.** $\frac{(n+m)^2(n^2-m^2)}{m^4n^4}$.

---

71. a^{-1}. **72.** a^{-2}. **73.** a^{-2}. **74.** a^{-m}. **75.** a^mb^{-n}.
76. a^xb^{-x}. **77.** $-2a^{-1}$. **78.** $-5m^{-5}$. **79.** $3m^{-1}$.
80. $-xy^{-3}$. **81.** $-xz^{-3}$. **82.** bp^{-4}. **83.** $-bp^{-4}$.
84. $a^5.a^{-3} = a^2$. **85.** $b^mb^{-n} = b^{m-n}$. **86.** $z^{m+1}.z^{-p}$. **87.** $x^{-6}.m$.
88. $xy(x+y)^{-1}$. **89.** $ay^{-4} + by^{-3} + cy^{-2} + dy^{-1} + ey^0$.
90. $a^{3m}(xy^2)^{-3}$. **91.** $b^nb^{-1}y^{-5} = b^{n-1}y^{-5}$.
92. $c^4c^{-m}z^{-p} = c^{4-m}z^{-p}$. **93.** $x^{m-5} + y^{n-3}$.
94. $(x^{-2} - y^{-2})(p^{-1} - y^{-1})^{-1}$. **95.** $(m^{-3} + n^{-4})^3.(x^{-5} - y^{-7})^{-4}$.
96. $(a^{-2} - b^{-4})^{-3}$. **97.** $(x^{-2} + y^{-1})^{-2}.(x^{-3} - y^{-4})^{-3}$.
98. $(x+y)^{-2}(x^2+y^2)$. **99.** $3^{-1}(mn)^2$.
100. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-1} = (x-y)(x+y)^{-1}$. **101.** $(a-b)^3(a+b)^{-3}$.
102. $(1-z)^{-7}$.

---

103. 1. **104.** 2. **105.** 18. **106.** $-\frac{5}{64}$. **107.** -375.

108. 1. **109.** $\frac{1}{2}$. **110.** 1. **111.** $\frac{1}{25}$. **112.** $\frac{4}{5}$.

113. 1. **114.** 1. **115.** 1. **116.** 1. **117.** 4000.
118. 100 000. **119.** 400. **120.** 80. **121.** 405. **122.** -20.

123. 20. **124.** 5. **125.** 16. **126.** $\frac{1}{4}$. **127.** 0.

128. 3119. **129.** 525. **130.** -17. **131.** 1. **132.** 20.

VII

1. a. **2.** m^4. **3.** x^4. **4.** b^3. **5.** n^{-11}. **6.** y^{-2}. **7.** z^{-2}.

8. a^{-1}. **9.** h^{m-n}. **10.** d^{q-p}. **11.** 1. **12.** p^{b-a}. **13.** b^{-1}.

14. m^2n^{-2}. **15.** $x^{-4}y^2$. **16.** $b^{m-n}c^{q-p}$. **17.** a^3b^{n-m}.

18. $a^{-(m+n)}$. **19.** a^{-7}. **20.** b^{-7}. **21.** m^{-8}.

22. n^{-4}. **23.** $x^{-(m+p)}$. **24.** $y^{-(a+c)}$. **25.** z^{-3}.

26. z^{-4}. **27.** $u^{-(p+q)}$. **28.** $v^{-(m+2n)}$. **29.** x^{-5m}.

30. y^{-6x}. **31.** $a^{-(2b+1)}$. **32.** $a^{-2(x+y)}$. **33.** $c^{-4(x+1)}$.

34. $m^{3(x-y)}$. **35.** n^{-2}. **36.** $p^{-2(x+y+2z)}$. **37.** a^{-2}.

38. $-b^{-3}$. **39.** $-x^{-7}$. **40.** y^{-10}. **41.** $-m^{-5}$.

42. x^{-4}. **43.** $-m^{-4n+1}$. **44.** $-x^{-(2m+1)}$. **45.** x^{-9}.

46. $-x^{-9}$. **47.** y^{-2m}. **48.** $a^{-7}+a^{-6}+a^{-5}+a^{-4}$.

49. $-m^{-8}+m^{-7}-m^{-6}+m^{-5}-m^{-4}$.

50. $x^{-8}-x^{-7}+x^{-6}-x^{-5}+x^{-4}$.

51. $-y^{-10}-y^{-9}-y^{-8}-y^{-7}-y^{-6}-y^{-5}$.

52. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$. **53.** $\frac{y^{-2}}{x^{-3}}$. **54.** $-\left(\frac{m}{n}\right)^{-8}$. **55.** $\frac{m^{-1}n^{-2}}{b^{-3}}$.

56. $2a^{-4}-16a^{-2}b^{-2}+22a^{-1}b^{-3}-12b^{-4}$.

57. $x^{-1}-x^{-2}+5x^{-4}-3x^{-5}$.

58. $a^4+2a^3b^{-3}-6a^2b^{-2}+3ab^{-1}-4ab^{-5}+8b^{-4}-6a^{-1}b^{-3}$.

59. $x^{-2}b^{-6}-3x^{-3}b^{-5}+4x^{-4}b^{-4}-7x^{-5}b^{-3}+6x^{-6}b^{-2}$.

60. $\frac{2}{b^{-4}}+\frac{4a^{-1}}{b^{-3}}-\frac{7a^{-2}}{b^{-2}}-\frac{2a^{-3}}{b^{-1}}+3a^{-4}$.

61. $\frac{x^{-1}}{2y^{-9}}-\frac{7x^{-5}}{6y^{-5}}+\frac{13x^{-7}}{3y^{-3}}-\frac{2x^{-9}}{y^{-1}}$.

62. $a^{-6}-b^{-10}$. **63.** $m^{-2}-n^{-2}$. **64.** $4x^{-4}-9y^{-6}$.

65. $b^{-2m}-c^{-2n}$. **66.** $9a^2b^{-6}-4c^{-2}x^{-4}$. **67.** $4a^{-2x}-9b^{-4y}$.

68. $\frac{a^{-2}}{b^{-2m}} - \frac{c^{-8}}{d^{-6}}$. **69.** $\frac{1}{m^{-2x}} - \frac{4}{n^{-6y}}$. **70.** $\frac{b^{-2p}}{c^{-4q}} - \frac{a^{-2m}}{x^{-2n}}$.

71. *a*) ∞ ; *b*) 0. **72.** *a*) 0; *b*) ∞.

VIII

1. $12^{-2} = \frac{1}{144}$. **2.** $30^{-1} = \frac{1}{30}$. **3.** $40^{-2} = \frac{1}{1600}$.

4. $6^{-3} = \frac{1}{216}$. **5.** $10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$. **6.** $\frac{1}{9}$.

7. $\frac{1}{9}$. **8.** $\frac{1}{27}$. **9.** $\frac{1}{27}$. **10.** 4. **11.** 10 000.

12. $\frac{1\,000\,000}{4\,096}$. **13.** 1000. **14.** $\frac{1600}{441}$. **15.** $\frac{3125}{32}$. **16.** $(ab)^{-1}$.

17. $(mn)^{-2}$. **18.** $2(xy)^{-3}$. **19.** $5(yz)^{-5}$. **20.** $6(ab)^{-4}$.

21. $\frac{2}{3}a^{-14}$. **22.** $(mn)^{-8}$. **23.** $2(bl)^{-6}$. **24.** $(6ab)^{-3}$.

25. $(ac)^{-1}$. **26.** $\left(\frac{1}{3}xy\right)^{-4}$. **27.** $(2ay)^{-7}$. **28.** $(0{,}15ab)^{-1}$.

29. $(ab)^{-4}$. **30.** $(3mn)^{-5}$. **31.** $(a - b)^{-8}$.

32. $(x^2 - y^2)^{-16}$. **33.** $(3m^5 - 2n)^{-4}$. **34.** $-(2a^3 - 5b^{-1})^{-6}$.

35. $-(2 - 5m^4)^{-10}$. **36.** $-(1 - x^2)^{-14}$. **37.** $-(0{,}1 - 0{,}4y^6)^{-2}$.

38. $-(0{,}5a - 0{,}1b^2)^{-18}$. **39.** $-(l^{-1} - m^{-5})^{-10}$.

40. $\left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{m^{-2}}{n^{-4}}\right)^{-3}$. **41.** $\left(\frac{x^2}{y^6} - \frac{z^{-2}}{y^{-8}}\right)^{-7}$. **42.** $\left(\frac{1}{y^8} - \frac{a^{-2}}{m^{-10}}\right)^{-5}$.

43. $\left(\frac{9x^2}{a^2} - \frac{4m^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-2}$. **44.** $\left(\frac{a^{-2}}{z^4} - \frac{x^{-6}}{y^{-8}}\right)^{-3}$. **45.** $\left(\frac{4}{y^{-6}} - \frac{1}{z^{2}}\right)^{-6}$.

46. $\left(\frac{a^2}{b^{-4}} - 0{,}01\right)^{-3}$. **47.** $\left(0{,}16x^{-6} - \frac{1}{y^{-2}}\right)^{-1}$.

48. $\left(y^{-4} - \frac{9}{4x^{-2}}\right)^{-5}$. **49.** $\left(\frac{2a^{-4} - 3b^{-5}}{5x^{-1} + 3y^{-2}}\right)^{-5}$.

50. $(3a^{-1} + 2b^{-3})^{-3}$. **51.** $\left(\frac{m^{-1}n - 3y^{-5}}{2a^{-2} - 5b^{-2}}\right)^{-4}$.

52. $\left\{(3x^{-3} + 0{,}5y^{-1})(0{,}1m^{-1} - 3n^{-4})\right\}^{-5}$.

53. $(4x^{-1} - 0{,}4z^{-2})^{-2} \times (a^{-3} - 2m^{-1})^{-2}$.

54. $\left(\dfrac{1 - x^{-4}}{0{,}7 - 2z^{-4}}\right)^{-7}$.

IX

1. $2^{-6} = \dfrac{1}{64}$. 2. $2^{-6} = \dfrac{1}{64}$. 3. $5^{12} = 244\,140\,625$.

4. $\dfrac{1}{244\,140\,625}$. 5. $\dfrac{1}{100\,000\,000}$. 6. 729.

7. 16 777 216. 8. 125. 9. 125.

10. $\dfrac{1}{282\,429\,536\,481}$. 11. 4096. 12. 1 000 000.

13. $3\frac{3}{8}$. 14. 625. 15. $\dfrac{2}{9}$. 16. $3\frac{3}{4}$. 17. $64a^6$.

18. $\dfrac{a^{-4}}{256}$. 19. x^6. 20. y^{-4}. 21. 1. 22. $a^{\ 2}$.

23. b^{-4}. 24. $-m^{-3}$. 25. $a^{-4}b^2$. 26. mn^3. 27. $a^{-4}b^{-10}$.

28. $-a^3b^6$. 29. $-x^{10}y^{20}$. 30. x^2y^4. 31. a^{mn}. 32. b^{-3n}.

33. d^{5p}. 34. c^{-2x}. 35. m^{-2xy}. 36. a^{-2y}. 37. $a^{2m}b^{-2x}$.

38. b^3c^{3y}. 39. $h^{mp}v^{np}$. 40. $x^{-2an}y^{-2mn}$.

41. $x^{2mp}y^{2np}$. 42. $-b^{-m(2m+1)}c^{-n(2m+1)}$.

43. $-d^{x(2m+1)}e^{y(2m+1)}$. 44. $(3a)^{4x}$. 45. $-5^{2p+1}m^{-p(2p+1)}$.

46. $-a^{-6}$. 47. $a^{-4n(2n+1)}$. 48. a^{-6n}.

49. m^{-2pqx}. 50. $\dfrac{a^2b^{-4}}{c^{2m}d^{2n}}$. 51. $\dfrac{a^{-2x}b^{3x}}{c^{px}d^{qx}}$. 52. $\dfrac{b^{-m}c^{m3}}{x^{2m}y^{4m}}$.

53. $\dfrac{xy^{-1}}{a^{-1}}$. 54. $\dfrac{m^{-1}}{x^py^q}$. 55. $\dfrac{m-n}{m+n}$. 56. $\left(\dfrac{m+n}{p+q}\right)^2$.

57. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$. 58. $\dfrac{x-y}{x+y}$. 59. $\dfrac{m+n}{m-n}$. 60. $1 - x^2$.

61. 1. 62. $\left(\dfrac{x+y}{a-b}\right)^5$. 63. $\left(\dfrac{c-d}{a+b}\right)^2$. 64. $\left(\dfrac{y-x}{a+b}\right)$.

65. $\dfrac{c-d}{m-n}$.

X

1. 2. **2.** 27. **3.** 25. **4.** $\frac{1}{49}$. **5.** $\frac{1}{1296}$.

6. $\frac{1}{100}$. **7.** $\frac{1}{2401}$. **8.** 81. **9.** $\frac{1}{81}$. **10.** $\frac{1}{16\,807}$.

11. 1. **12.** $\frac{16}{9}$. **13.** $\frac{8}{27}$. **14.** $\frac{1}{32}$. **15.** $15\frac{5}{8}$.

16. 0,09. **17.** 0,49. **18.** $15\frac{5}{8}$. **19.** 1000. **20.** 125. **21.** a^2.

---

22. $\frac{1}{a}$. **23.** $\frac{1}{a^2}$. **24.** m^x. **25.** $\frac{m^x}{m^2}$. **26.** x^a.

27. $\frac{y^m}{y^a}$. **28.** b^2. **29.** $\frac{1}{c^{6b}}$. **30.** $\frac{1}{(a+b)^{2y}}$.

31. $\frac{(c-d)^{2b}}{(c-d)^{2a}}$. **32.** $\frac{ab^2n}{m^4}$. **33.** $\frac{c^2d^{2n-4}x^{a+4}}{y^{2n}}$. **34.** $a^{-3}+b^{-2}$.

35. $\left(\frac{b^3-a}{y^2+x^4}\right)^2\left(\frac{y^2-x^4}{b^3+a}\right)\frac{x^4y^2}{ab^3}$. **36.** $\left(\frac{c^{2n}d^{4m}}{d^{2m}-c^n}\right)^2\frac{x^5y^5}{(d^{4m}-c^{2n})}$.

37. $-\frac{1}{x^m}(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots.\ x+1)$.

38. $-x^m-x^{m-1}-x^{m-2}$ etc. **39.** $\frac{u^5b^7}{u^4v^8}$. **40.** $\frac{a^3b^2}{c^4d^5}\left(\frac{d^5-c^4}{a^3+b^2}\right)$.

XI

1. 256. **2.** $\frac{32}{243}$. **3.** $\frac{1}{8}$. **4.** 32. **5.** $\frac{1}{81}$. **6.** 128.

7. $\frac{1}{81}$. **8.** $15\frac{5}{8}$. **9.** $\frac{49}{36}$. **10.** $\frac{1}{100\,000}$. **11.** $\frac{8}{27}$. **12.** $\frac{81}{16}$.

13. $\frac{9}{16}$. **14.** 1. **15.** $\frac{243}{1024}$. **16.** 1. **17.** $\frac{1}{a^{6x}}$. **18.** $\frac{1}{a^{10}b^{14}}$.

19. $\frac{1}{a^4}+\frac{m}{n^3}$. **20.** $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y}$. **21.** $y-\frac{x^6}{y^4}$.

22. $\frac{a}{b^2}+\frac{m^4}{n^8}$. **23.** $\frac{(a+b)^4}{(a^2+b^2)^2}$. **24.** 1.

III. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES, POSITIFS OU NÉGATIFS.

XII

1. $a^{\frac{3}{2}}$. 2. $a^{\frac{5}{2}}$. 3. a^3. 4. $m^{\frac{1}{2}}$. 5. $n^{\frac{1}{3}}$.

6. $n^{\frac{5}{3}}$. 7. $x^{\frac{3}{4}}$. 8. $a^{\frac{5}{7}}$. 9. $a^{\frac{5}{4}}$. 10. $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

11. $ab^{\frac{2}{3}}$. 12. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}$. 13. $m^{\frac{1}{7}}n^{\frac{3}{7}}$. 14. $p^{\frac{a-b}{2}}$.

15. $(x-y)^{\frac{m}{3}}$. 16. $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$. 17. $3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}y^3$. 18. $(a-5)^{\frac{1}{5}}$.

19. $(a+b)^{\frac{m}{3}+1}$. 20. $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a-b$.

21. $\left[(m-p)^2\right]^{\frac{1}{2}} = m-p$. 22. $(a^6-b^3)^{\frac{2}{3}}(a-b)^2$.

23. $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. 24. $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$. 25. $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$. 26. $\frac{1}{m^{\frac{1}{p}}n^{\frac{2}{p}}}$.

27. $a^{-\frac{m}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{p}}}$. 28. $m^{\frac{n}{p}}$. 29. $(a+b)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{a+b}{(a+b)^{\frac{1}{n}}}$.

30. $\frac{(x-y)^{\frac{1}{p}}}{(x-y)^2}$. 31. $\frac{3b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$. 32. $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. 33. $\frac{m^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$. 34. $\frac{m^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}}$.

35. $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{2}{m}}}$. 36. $\frac{b^{\frac{3}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}$. 37. $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}$. 38. $\frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$. 39. $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$.

40. $a^{\frac{5}{4}}d^{\frac{4}{5}}$. 41. $x^{\frac{5}{21}}$. 42. $m^{\frac{1}{3}}$. 43. $a^{\frac{5}{6}}$. 44. $a^{\frac{7}{12}}$.

45. $a^{\frac{m}{ab}}$. 46. a^2. 47. $m^{\frac{3}{2}}$. 48. $17^{\frac{6}{5}}$. 49. x^{12}.

50. $x^{\frac{35}{2}} y^{\frac{20}{3}}$. **51.** xy. **52.** $b^{\frac{20}{3}}$. **53.** $c^{\frac{40}{7}}$. **54.** $d^{\frac{20}{3}}$.

55. $e^{\frac{1}{6}}$. **56.** $x^{\frac{1}{3}}$.

---

57. $\sqrt[3]{a}$. **58.** $\sqrt[5]{1} = 1$. **59.** $\sqrt[4]{m^3}$. **60.** $\sqrt[7]{x^3}$. **61.** $\sqrt[3]{n^2}$.

62. $\sqrt[4]{b^3}$. **63.** $\sqrt[6]{e^5}$. **64.** $\sqrt[9]{h}$. **65.** $\sqrt[8]{i^7}$. **66.** $\sqrt[7]{l}$.

67. $\sqrt[b]{x^a}$. **68.** $\sqrt[m]{y}$. **69.** $\sqrt[q]{d^p}$. **70.** $\sqrt[m]{g^{h+1}}$. **71.** $\sqrt[n]{k^{i+2}}$.

72. $\sqrt[2n]{bm}$. **73.** $\sqrt[1+n]{\frac{a}{am}}$. **74.** $\sqrt[m+1]{c^{m+2}}$. **75.** $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

76. $\sqrt[4]{\frac{1}{c^3}}$. **77.** $\sqrt[n]{\frac{1}{em}}$. **78.** $\sqrt[3]{\frac{1}{x^{2m}}}$. **79.** $\sqrt[m+1]{\frac{1}{y^{a+b}}}$.

80. $\frac{z^p}{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{z^{3p-1}}$. **81.** $\frac{u^m}{\sqrt[p]{u^n}}$. **82.** $\sqrt{a^2 - b^2}$.

83. $\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}$. **84.** $\sqrt[3]{m^2}\,\sqrt[4]{n^3}$. **85.** $\sqrt{x^5 y^3}$.

86. $\frac{1}{\sqrt[3]{m^3 - n^3}}$. **87.** $\frac{\sqrt{a}}{b}$. **88.** $\frac{m^2}{\sqrt[5]{n^8}}$.

89. $\sqrt[7]{\frac{x^{15}}{y^{20}}}$. **90.** $\frac{\sqrt[16]{u^3}}{\sqrt[10]{v^3}}$. **91.** $\sqrt[5n]{\frac{a^{2m}}{b^{2c}}}\,\sqrt[n]{\frac{bcm}{a^{m^2}}} = \sqrt[5n]{\frac{b^{c(5m-2)}}{a^{m(5m-2)}}}$.

92. $\sqrt[10y]{\frac{n^{4x}}{n^{3y}}}\,\sqrt[16y]{\frac{m^{3y}}{m^{4x}}} = \sqrt[80y]{\frac{n^{32x} m^{15y}}{n^{24y} m^{20x}}}$. **93.** $\sqrt{\frac{1}{a^6 b^6}} = \frac{1}{a^3 b^3}$.

94. $\frac{\sqrt[7]{x^{3n}}}{\sqrt[7q]{x^{3p}}} = \sqrt[7q]{\frac{x^{3nq}}{x^{3p}}}$. **95.** $\sqrt[3r]{\frac{1}{pmn}}$. **96.** $\sqrt[10]{u^{7x}}$. **97.** $\sqrt[n]{\frac{x^{am}}{v^{3m}}}$.

98. $\sqrt[10p]{a^{9n}}$. **99.** $\sqrt{\frac{1}{b^a}}$. **100.** $\frac{\sqrt[20a]{c^9}}{\sqrt[20]{d^a}} = \sqrt[20a]{\frac{c^9}{d^{a^2}}}$.

---

101. 2. **102.** 3. **103.** 5. **104.** 2. **105.** 3.

106. 2. **107.** 5. **108.** 6. **109.** 7. **110.** 9.

111. 32. **112.** 729. **113.** 3125. **114.** 16. **115.** 243.

116. 64. **117.** 64. **118.** 16. **119.** $\frac{1}{8}$. **120.** $\frac{1}{16}$.

121. $\frac{1}{64}$. **122.** $\frac{1}{32}$. **123.** $\frac{1}{8}$. **124.** $\frac{1}{9}$. **125.** $\frac{1}{125}$.

126. $\frac{5}{6}$. **127.** $\frac{2}{3}$. **128.** $\frac{5}{6}$. **129.** $\frac{2}{3}$. **130.** $\frac{1}{2}$.

131. $\frac{6}{5}$. **132.** $\frac{3}{2}$. **133.** $\frac{6}{5}$. **134.** $\frac{3}{2}$. **135.** 2.

136. $\frac{4}{9}$. **137.** $\frac{2}{5}$. **138.** $\frac{27}{8}$. **139.** $\frac{8}{27}$. **140.** 0,5.

141. 0,09. **142.** $\frac{1}{0{,}5} = 2$. **143.** $+ 0{,}09$. **144.** $- 0{,}008$.

145. $\frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$. **146.** 0,8. **147.** 0,4. **148.** 0,3.

149. 64. **150.** 27.

XIII

1. Addition et soustraction avec exposants négatifs ou fractionnaires.

1. $4a^{\frac{2}{3}}$. **2.** $\frac{b^{\frac{3}{4}}}{2} + 4b^{-\frac{3}{4}} = \frac{b^{\frac{3}{2}} + 8}{2b^{\frac{3}{4}}}$. **3.** $5\left(m^{\frac{2}{3}} - 2m^{-\frac{2}{3}}\right)$.

4. $9x^{-3}$. **5.** $0{,}81m^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{0{,}9}{m}\right)^2$. **6.** $0{,}4c^{-\frac{3}{5}}$.

7. $- 1{,}3d^{-4}$. **8.** $2{,}6a^{-1} + 2{,}2a^{-1}b^{-\frac{1}{3}} + 2a^{-2}b^{-\frac{2}{3}} - 3{,}5$.

9. $x^{-4}y^{\frac{1}{3}} - 2x^{-3}y^{\frac{1}{2}}$. **10.** $- 3a^{-1} + 2b^{-4} + 2a^{-2}b^{-3} + 3b^{-5}$.

11. $- (m + 1)x^{-\frac{4}{5}} + (a + d)x^{-\frac{3}{5}} + (3b - c)x^{-\frac{2}{5}}$.

12. $(2 - m)y^{-\frac{1}{2}} + (5b + m - c)y^{-\frac{3}{2}} + (3 - c)y^{\frac{3}{2}}$.

13. $- (a + 1)b^{-\frac{1}{2}}$. **14.** $- 3{,}7d^{-\frac{3}{4}}$. **15.** $0{,}5e^{-x}$.

16. $- 1{,}15h^{-4}$. **17.** $4m^{-5}$. **18.** $1{,}3p^{-3}$.

19. $2{,}4x^{-1} - 7{,}7x^{-2} + 0{,}1x^{-3}$.

20. $\frac{19}{35}a^{\frac{1}{3}} - 4{,}55b^{-\frac{1}{2}} + 3{,}8c^{-\frac{2}{3}}$.

21. $2{,}3m^{-1}n^{-\frac{1}{4}} + 2m^{-2}n^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}m^{-3}n^{-\frac{5}{4}}$.

22. $3{,}5h^{-1} + 2\frac{14}{15}h^{-3}x^2 + 1{,}5$.

23. $x^{-\frac{4}{5}} - 4{,}3x^{-1}y^{-\frac{2}{3}} - 4\frac{1}{6} - 4n^{-\frac{1}{2}}$.

24. $0{,}5z^{-\frac{2}{3}} - 5z^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}} + 3{,}5 + 4v^{-\frac{1}{2}}$.

XIV

2. Multiplication de quantités affectées d'exposants fractionnaires.

1. $a^{\frac{4}{5}}$. 2. $b^{\frac{1}{12}}$. 3. $a^{-\frac{11}{15}}$. 4. $c^{-\frac{1}{2}}$.

5. $d^{-\frac{9}{5}}$. 6. m^{-1}. 7. $m^{-\frac{2}{7}}$. 8. $x^{\frac{(m-n)}{mn}}$.

9. $x^{\frac{mq+np}{nq}}$. 10. $y^{-\frac{(an+cm)}{cn}}$. 11. $a^{-\frac{x}{y}}$. 12. $z^{-\frac{c}{m}}$.

13. $u^{-\frac{1}{4}}$. 14. $d^{\frac{-(n+4)}{2m}}$. 15. $e^{\frac{-x(2y+1)}{y}}$. 16. $a^{\frac{2}{5}}$.

17. $b^{\frac{2}{5}}$. 18. $h^{\frac{1}{3}}$. 19. $m^{\frac{a}{bx}}$. 20. $n^{-\frac{ac}{bd}}$.

21. $x^p + x^{\frac{p}{2}}y^{\frac{q}{2}} + y^q$. 22. $x^r + 2x^{\frac{r}{2}}y^{2p} + 9y^{4p}$.

23. $x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2}$.

24. $2a^{-2} - 7a^{-\frac{3}{2}} + 6a^{-\frac{5}{4}} + 7a^{-1} - 11a^{-\frac{3}{4}} - 2a^{-\frac{1}{2}} + 7a^{-\frac{1}{4}}$
$- 6$.

25. $m^{-\frac{5}{6}} - \frac{1}{2}m^{-\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}m^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{6}m^{-\frac{7}{12}} + \frac{1}{8}m^{-\frac{1}{2}} - \frac{13}{20}m^{-\frac{1}{3}}$
$+ \frac{31}{80}m^{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{20}$.

26. $a^{\frac{6}{5}} - 5ab^{\frac{1}{2}} + 9a^{\frac{4}{5}}b - 6a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{2}{5}}b^2 + a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{5}{2}}$.

27. $2a^{\frac{5}{p}} - 5a^{\frac{4}{p}} + 10a^{\frac{3}{p}} - 7a^{\frac{2}{p}} + 6a^{\frac{1}{p}}$.

28. $c^{-\frac{7}{m}} - 5c^{-\frac{6}{m}} + 10c^{-\frac{5}{m}} - 8c^{-\frac{4}{m}} - 3c^{-\frac{3}{m}} + c^{-\frac{2}{m}}$.

29. $d^{-\frac{2}{x}} - \frac{5}{6}d^{-\frac{3}{x}} + \frac{1}{2}d^{-\frac{4}{x}} + 2\frac{29}{60}d^{-\frac{5}{x}} - 1\frac{3}{5}d^{-\frac{6}{x}} + \frac{4}{5}d^{-\frac{7}{x}}$.

30. $2h^{-\frac{2a}{b}} - (4g + m)h^{-\frac{3a}{b}} + (2gm - 1)h^{-\frac{4a}{b}}$

$- (2g - m)h^{-\frac{5a}{b}} - h^{-\frac{6a}{b}}$.

31. $x^{\frac{3}{p}} - (a + b + c)x^{\frac{2}{p}} + (ab + ac + bc)x^{\frac{1}{p}} - abc$.

32. $y^{\frac{5}{m}} + (b - a)y^{\frac{4}{m}} + (3b - ab - c)y^{\frac{3}{m}}$

$+ (ac + 3b^2 - c)y^{\frac{2}{m}} - 4bcy^{\frac{1}{m}} + c^2$.

33. $\frac{ab}{x^{-\frac{7}{5}}} - \frac{5ab}{x^{-\frac{6}{5}}} + \frac{a(8b + 1)}{x^{-1}} - \frac{a(5b + 3)}{x^{-\frac{4}{5}}} + \frac{2a(b + 1)}{x^{-\frac{3}{5}}}$

$- \frac{a}{x^{-\frac{2}{5}}}$.

34. $\frac{2m^{-\frac{2}{5}}}{n^{-\frac{5}{4}}} - \frac{5m^{-\frac{3}{5}}}{n^{-1}} + \frac{5m^{-\frac{4}{5}}}{n^{-\frac{3}{4}}} - \frac{3m^{-1}}{n^{-\frac{1}{2}}}$. **35.** $\frac{25x^{-\frac{5}{3}}}{16y^{-\frac{4}{3}}} - \frac{9a^{-1}}{4b^{-\frac{4}{5}}}$.

36. $4a^{-2}b^{-\frac{4}{3}} - 12a^{-\frac{8}{5}}b^{-\frac{22}{15}} + 9a^{-\frac{6}{5}}b^{-\frac{8}{5}}$.

XV

3. Division de quantités affectées d'exposants fractionnaires.

1. $e^{-\frac{1}{4}}$. **2.** $h^{-\frac{1}{3}}$. **3.** $k^{-\frac{1}{2}}$. **4.** $l^{\frac{1}{5}}$. **5.** $g^{\frac{1}{12}}$. **6.** $a^{\frac{9}{10}}$.

7. $b^{-\frac{23}{24}}$. **8.** $m^{-\frac{1}{20}}$. **9.** $p^{-\frac{(m+n)}{mn}}$. **10.** $q^{\frac{a+b}{ab}}$. **11.** $t^{-\frac{(am-n)}{an}}$.

12. $v^{-\frac{(b+ap)}{bp}}$. **13.** $x^{\frac{an-bm}{bn}}$. **14.** $z^{-\frac{(aq+p)}{q}}$. **15.** $y^{\frac{m-n}{n}}$.

16. $c^{\frac{a-2}{m}}$. **17.** $d^{\frac{b-2a}{2m}}$. **18.** $e^{\frac{am+n}{an}}$. **19.** $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3p}{q}}$.

20. $\frac{a^{-\frac{1}{4}}}{3b^{-\frac{2}{3}}}$. **21.** $x + y$. **22.** $x - x^{\frac{1}{2}}$.

23. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}}$. **24.** $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{4}}$.

25. $x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}$.

26. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$.

27. $x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{5}} + 1$.

28. $y^{\frac{5}{6}} + y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{6}} + 1$. **29.** $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$.

30. $a^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{8}}$. **31.** $m^{-\frac{4}{5}} + 2m^{-\frac{3}{5}} - 3m^{-\frac{2}{5}} + 4m^{-\frac{1}{5}}$.

32. $x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} + z^{\frac{1}{5}}$. **33.** $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}$.

34. $m^{-\frac{2}{5}} + 2n^{-\frac{2}{5}} - 3p^{-\frac{2}{5}}$.

35. $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{3}}} + \frac{2a^{-1}}{b^{-\frac{2}{3}}} + \frac{a^{-\frac{3}{2}}}{b^{-1}}$. **36.** $\frac{m^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{2m}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{3m^{\frac{4}{3}}}{n}$.

XVI

4. Elévation aux puissances de quantités composées.

1. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. $m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$.

3. $c^8 + 8c^7d + 28c^6d^2 + 56c^5d^3 + 70c^4d^4 + 56c^3d^5 + 28c^2d^6 + 8cd^7 + d^8$.

4. $h^{10} + 10h^9l + 45h^8l^2 + 120h^7l^3 + 210h^6l^4 + 252h^5l^5 + 210h^4l^6 + 120h^3l^7 + 45h^2l^8 + 10hl^9 + l^{10}$.

5. $x^{11} + 11x^{10}y + 55x^9y^2 + 165x^8y^3 + 330x^7y^4 + 462x^6y^5 + 462x^5y^6 + 330x^4y^7 + 165x^3y^8 + 55x^2y^9 + 11xy^{10} + y^{11}$.

6. $y^7 - 7y^6z + 21y^5z^2 - 35y^4z^3 + 35y^3z^4 - 21y^2z^5 + 7yz^6 - z^7.$

7. $x^9 - 9x^8a + 36x^7a^2 - 84x^6a^3 + 126x^5a^4 - 126x^4a^5 + 84x^3a^6 - 36x^2a^7 + 9xa^8 - a^9.$

8. $y^3 - 3y^2b + 3yb^2 - b^3.$

9. $c^5 - 5c^4d + 10c^3d^2 - 10c^2d^3 + 5cd^4 - d^5.$

10. $m^8 - 8m^7a + 28m^6a^2 - 56m^5a^3 + 70m^4a^4 - 56m^3a^5 + 28m^2a^6 - 8ma^7 + a^8.$

11. $1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4.$ **12.** $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1.$

13. $1 + 6d + 15d^2 + 20d^3 + 15d^4 + 6d^5 + d^6.$

14. $1 - 8h + 28h^2 - 56h^3 + 70h^4 - 56h^5 + 28h^6 - 8h^7 + h^8.$

15. $1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}.$

16. $32 + 80a + 80a^2 + 40a^3 + 10a^4 + a^5.$

17. $729 - 1458a + 1215a^2 - 540a^3 + 135a^4 - 18a^5 + a^6.$

18. $m^9 - 18m^8 + 144m^7 - 672m^6 + 2016m^5 - 4032m^4 + 5376m^3 - 4608m^2 + 2304m - 512.$

19. $x^3 - 15x^2 + 75x - 125.$

20. $y^5 - 15y^4 + 90y^3 - 270y^2 + 405y - 243.$

21. $a^{21} + 7a^{18}b^2 + 21a^{15}b^4 + 35a^{12}b^6 + 35a^9b^8 + 21a^6b^{10} + 7a^3b^{12} + b^{14}.$

22. $m^{40} - 8m^{35}n^2 + 28m^{30}n^4 - 56m^{25}n^6 + 70m^{20}n^8 - 56m^{15}n^{10} + 28m^{10}n^{12} - 8m^5n^{14} + n^{16}.$

23. $x^{15} + 5x^{12}y^4 + 10x^9y^8 + 10x^6y^{12} + 5x^3y^{16} + y^{20}.$

24. $a^{32} - 8a^{28}y^3 + 28a^{24}y^6 - 56a^{20}y^9 + 70a^{16}y^{12} - 56a^{12}y^{15} + 28a^8y^{18} - 8a^4y^{21} + y^{24}.$

25. $a^7 - 7a^6b^2 + 21a^5b^4 - 35a^4b^6 + 35a^3b^8 - 21a^2b^{10} + 7ab^{12} - b^{14}.$

26. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{2ax}{by} + \frac{x^2}{y^2}.$ **27.** $\frac{a^3}{c^3} - \frac{3a^2d}{c^2x} + \frac{3ad^2}{cx^2} - \frac{d^3}{x^3}.$

28. $\frac{m^5}{n^5} + \frac{5m^4p}{n^4q} + \frac{10m^3p^2}{n^3q^2} + \frac{10m^2p^3}{n^2q^3} + \frac{5mp^4}{nq^4} + \frac{p^5}{q^5}.$

29. $\frac{m^6}{p^6} - \frac{6m^5n}{p^5q} + \frac{15m^4n^2}{p^4q^2} - \frac{20m^3n^3}{p^3q^3} + \frac{15m^2n^4}{p^2q^4} - \frac{6mn^5}{pq^5} + \frac{n^6}{q^6}.$

30. $\frac{1}{a^4} - \frac{4b}{a^3c} + \frac{6b^2}{a^2c^2} - \frac{4b^3}{ac^3} + \frac{b^4}{c^4}$.

31. $m^{\frac{10}{3}} - 5m^{\frac{8}{3}}n^{\frac{1}{2}} + 10m^2n - 10m^{\frac{4}{3}}n^{\frac{3}{2}} + 5m^{\frac{2}{3}}n^2 - n^{\frac{5}{2}}$.

32. $a^{\frac{9}{2}} + 6a^{\frac{15}{4}}b^{\frac{2}{3}} + 15a^3b^{\frac{4}{3}} + 20a^{\frac{9}{4}}b^2 + 15a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}} + 6a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{10}{3}} + b^4$.

33. $x^{\frac{14}{5}} + 7x^{\frac{12}{5}}y^{\frac{1}{4}} + 21x^2y^{\frac{1}{2}} + 35x^{\frac{8}{5}}y^{\frac{3}{4}} + 35x^{\frac{6}{5}}y + 21x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{5}{4}}$
$+ 7x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{7}{4}}$.

34. $x^2 - 4x^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{3}} + 6xz^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}z + z^{\frac{4}{3}}$.

35. $a + 5a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{2}{5}} + 10a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}} + 10a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{6}{5}} + 5a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{8}{5}} + b^2$.

36. $a^{-5} + 5a^{-4}b^{-2} + 10a^{-3}b^{-4} + 10a^{-2}b^{-6} + 5a^{-1}b^{-8} + b^{-10}$.

37. $a^{-24} + 8a^{-21}x^{-1} + 28a^{-18}x^{-2} + 56a^{-15}x^{-3} + 70a^{-12}x^{-4}$
$+ 56a^{-9}x^{-5} + 28a^{-6}x^{-6} + 8a^{-3}x^{-7} + x^{-8}$.

38. $m^{-28} - 7m^{-24}n^{-1} + 21m^{-20}n^{-2} - 35m^{-16}n^{-3} + 35m^{-12}n^{-4}$
$- 21m^{-8}n^{-5} + 7m^{-4}n^{-6} - n^{-7}$.

39. $d^{-12} - 6d^{-10}x^2 + 15d^{-8}x^4 - 20d^{-6}x^6 + 15d^{-4}x^8 - 6d^{-2}x^{10}$
$+ x^{12}$.

40. $c^{-20} + 4c^{-15}z + 6c^{-10}z^2 + 4c^{-5}z^3 + z^4$.

41. $m^{-\frac{5}{2}} + 5m^{-2}n^{-\frac{2}{3}} + 10m^{-\frac{3}{2}}n^{-\frac{4}{3}} + 10m^{-1}n^{-2} + 5m^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{8}{3}}$
$+ n^{-\frac{10}{3}}$.

42. $n^{-\frac{15}{4}} + 5n^{-3}p^{-\frac{2}{3}} + 10n^{-\frac{9}{4}}p^{-\frac{4}{3}} + 10n^{-\frac{3}{2}}p^{-2} + 5n^{-\frac{3}{4}}p^{-\frac{8}{3}}$
$+ p^{-\frac{10}{3}}$.

43. $n^{-\frac{8}{5}} - 4n^{-\frac{6}{5}}p^{-\frac{3}{5}} + 6n^{-\frac{4}{5}}p^{-\frac{6}{5}} - 4n^{-\frac{2}{5}}p^{-\frac{9}{5}} + p^{-\frac{12}{5}}$.

44. $a^{-\frac{5}{2}} + 5a^{-2}b^{-\frac{1}{3}} + 10a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{2}{3}} + 10a^{-1}b^{-1} + 5a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{4}{3}} + b^{-\frac{5}{3}}$.

45. $x^{-\frac{3}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}}y + 3x^{-\frac{1}{4}}y^2 + y^3$

46. $y^{-12} - 6y^{-10}z^{-\frac{2}{3}} + 15y^{-8}z^{-\frac{4}{3}} - 20y^{-6}z^{-2} + 15y^{-4}z^{-\frac{8}{3}}$
$- 6y^{-2}z^{-\frac{10}{3}} + z^{-4}$.

47. $u^{-\frac{8}{5}} + 4u^{-\frac{6}{5}}v^3 + 6u^{-\frac{4}{5}}v^6 + 4u^{-\frac{2}{5}}v^9 + v^{12}$.

48. $1 - 5z^{-\frac{2}{3}} + 10z^{-\frac{4}{3}} - 10z^{-2} + 5z^{-\frac{8}{3}} - z^{-\frac{10}{3}}$.

49. $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4.$

50. $243y^5 - 405y^4z + 270y^3z^2 - 90y^2z^3 + 15yz^4 - z^5.$

51. $4096z^6 - 6144z^5u + 3840z^4u^2 - 1280z^3u^3 + 240z^2u^4$
$- 24zu^5 + u^6.$

52. $128a^7 - 448a^6b^2 + 672a^5b^4 - 560a^4b^6 + 280a^3b^8 - 84a^2b^{10}$
$+ 14ab^{12} - b^{14}.$

53. $m^{12} + 18m^{10}b + 135m^8b^2 + 540m^6b^3 + 1215m^4b^4$
$+ 1458m^2b^5 + 729b^6.$

54. $a^5 - 10a^4c + 40a^3c^2 - 80a^2c^3 + 80ac^4 - 32c^5.$

55. $x^{12} - 12x^9d + 54x^6d^2 - 108x^3d^3 + 81d^4.$

56. $u^{-2} - 12u^{-\frac{4}{3}}e + 48u^{-\frac{2}{3}}e^2 - 64e^3.$

57. $128a^{14} - 1344a^{12}b + 6048a^{10}b^2 - 15120a^8b^3 + 22680a^6b^4$
$- 20412a^4b^5 + 10206a^2b^6 - 2187b^7.$

58. $729x^{-6} + 2916x^{-5}y^{\frac{2}{3}} + 4860x^{-4}y^{\frac{4}{3}} + 4320x^{-3}y^2 + 2160x^{-2}y^{\frac{8}{3}}$
$+ 576x^{-1}y^{\frac{10}{3}} + 64y^4.$

59. $256x^8 + 3072x^7z^{-\frac{1}{2}} + 16128x^6z^{-1} + 48384x^5z^{-\frac{3}{2}}$
$+ 90720x^4z^{-2} + 108864x^3z^{-\frac{5}{2}} + 81648x^2z^{-3} + 34992xz^{-\frac{7}{2}}$
$+ 6561z^{-4}.$

60. $\frac{1}{32}\Big(a^5 - 15a^4d^{-1} + 90a^3d^{-2} - 270a^2d^{-3} + 405ad^{-4}$
$- 243d^{-5}\Big).$

61. $3125m^{-10} + 625m^{-8}n^{-1} + 50m^{-6}n^{-2} + 2m^{-4}n^{-3} + \frac{m^{-2}n^{-4}}{25}$
$+ \frac{n^{-5}}{3125}.$

62. $\frac{64a^6}{b^6} - \frac{576a^5c}{b^5d} + \frac{2160a^4c^2}{b^4d^2} - \frac{4320a^3c^3}{b^3d^3} + \frac{4860a^2c^4}{b^2d^4}$
$- \frac{2916ac^5}{bd^5} + \frac{729c^6}{d^6}.$

63. $\frac{1}{32a^5} + \frac{15}{16a^4b} + \frac{45}{4a^3b^2} + \frac{135}{2a^2b^3} + \frac{405}{2ab^4} + \frac{243}{b^5}.$

64. $\frac{16}{a^{-4}} + \frac{32d^{-2}}{a^{-3}c^{-3}} + \frac{24d^{-4}}{a^{-2}c^{-6}} + \frac{8d^{-6}}{a^{-1}c^{-9}} + \frac{d^{-8}}{c^{-12}}.$

65. $\frac{x^7}{128} - \frac{7x^6y^{\frac{1}{3}}}{192} + \frac{7x^5y^{\frac{2}{3}}}{96} - \frac{35x^4y}{432} + \frac{35x^3y^{\frac{4}{3}}}{648} - \frac{7x^2y^{\frac{5}{3}}}{324} + \frac{7xy^2}{1458}$
$- \frac{y^{\frac{7}{3}}}{2187}.$

66. $\frac{a^5}{243b^5} + \frac{10a^4m^{\frac{1}{3}}}{81b^4x} + \frac{40a^3m^{\frac{2}{3}}}{27b^3x^2} + \frac{80a^2m}{9b^2x^3} + \frac{80am^{\frac{4}{3}}}{3bx^4} + \frac{32m^{\frac{5}{3}}}{x^5}.$

67. $1 - \frac{9y}{2} + \frac{135y^2}{16} - \frac{135y^3}{16} + \frac{1215y^4}{256} - \frac{729y^5}{512} + \frac{729y^6}{4096}.$

68. $\frac{2187a^7}{b^7} - \frac{10206a^8}{b^6x} + \frac{20412a^9}{b^5x^2} - \frac{22680a^{10}}{b^4x^3} + \frac{15120a^{11}}{b^3x^4}$
$- \frac{6048a^{12}}{b^2x^5} + \frac{1344a^{13}}{bx^6} - \frac{128a^{14}}{x^7}.$

69. $625m^{4x} - \frac{500m^{3x}n^{2y}}{3} + \frac{50m^{2x}n^{4y}}{3} - \frac{20m^xn^{6y}}{27} + \frac{n^{8y}}{81}.$

70. $243\, b^{5(m+1)} + 810b^{4(m+1)}d^{n-1} + 1080b^{3(m+1)}d^{2(n-1)}$
$+ 720b^{2(m+1)}d^{3(n-1)} + 240b^{m+1}d^{4(n-1)} + 32d^{5(n-1)}.$

71. $256x^{4(a-3)} - 768x^{3(a-3)}y^{2-b} + 864x^{2(a-3)}y^{2(2-b)}$
$- 432x^{a-3}y^{3(2-b)} + 81y^{4(2-b)}.$

72. $125m^{3(2x-1)} + \frac{225}{4}m^{2(2x-1)}n^{y-2} + \frac{135}{16}m^{2x-1}n^{2(y-2)} + \frac{27}{64}n^{3(y-2)}.$

73. $4a^6b^2 - \frac{20}{3}a^3b^4m + \frac{25}{9}m^2b^6.$

74. $\frac{a^{4m}b^{4x}}{256} - \frac{a^{4m+1}b^{4x-1}}{48} + \frac{a^{4m+2}b^{4x-2}}{24} - \frac{a^{4m+3}b^{4x-3}}{27}$
$+ \frac{a^{4m+4}b^{4x-4}}{81}.$

75. $32a^{10}b^{5m} + 40a^{m+8}b^{4m+2} + 20a^{2m+6}b^{3m+4} + 5a^{3m+4}b^{2m+6}$
$+ \frac{5}{8}a^{4m+2}b^{m+8} + \frac{1}{32}a^{5m}b^{10}.$

76. $m^3n^6p^3(p^6 - 9mnp^4 + 27m^2n^2p^2 - 27m^3n^3).$

---

77. $a^{-2} + b^{-1} + c^{-\frac{2}{3}} + 2a^{-1}b^{-\frac{1}{2}} + 2a^{-1}c^{-\frac{1}{3}} + 2b^{-\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{3}}.$

78. $a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{8}{3}} + c^{-1} - 2a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} + 2a^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{2}}$.

79. $m + n^{\frac{2}{3}} + p^{\frac{1}{2}} - 2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}} + 2m^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{4}} - 2n^{\frac{1}{3}}p^{\frac{1}{4}}$.

80. $4x^{\frac{2}{3}} + 9y^{\frac{1}{2}} + 16z^{\frac{2}{5}} + 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} + 16x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{5}} + 24y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{5}}$.

81. $25a^{-\frac{4}{3}} + b^{-\frac{3}{2}} + 9c^{-\frac{4}{5}} - 10a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{4}} + 30a^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{2}{5}} - 6b^{-\frac{3}{4}}c^{-\frac{2}{5}}$.

82. $4a^{-\frac{4}{3}} + 9d^{-\frac{2}{5}} + 25e^{-\frac{8}{5}} + 12a^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{5}} - 20a^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4}{5}}$
$- 30d^{-\frac{1}{5}}e^{-\frac{4}{5}}$.

83. $49m^{-\frac{8}{5}} + 25n^3 + q^2 - 70m^{-\frac{4}{5}}n^{\frac{3}{2}} + 14m^{-\frac{4}{5}}q - 10n^{\frac{3}{2}}q$.

84. $64x^{10} + 16y^{\frac{2}{5}} + 4z^{\frac{2}{7}} + 64x^5y^{\frac{1}{5}} - 32x^5z^{\frac{1}{7}} - 16y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{7}}$.

85. $9u^{-1} + 144u^{-1}v^{\frac{4}{5}} + 4v^{\frac{4}{5}} - 72u^{-1}v^{\frac{2}{5}} - 12u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{2}{5}} + 48u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{4}{5}}$.

86. $0{,}01a^{\frac{1}{2}} + 0{,}25b + 0{,}09c^{\frac{2}{7}} + 0{,}1a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 0{,}06a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{7}} + 0{,}3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{7}}$.

87. $0{,}49d^{\frac{3}{2}} + 0{,}64e^{\frac{4}{3}} + 0{,}36h^{\frac{2}{5}} - 1{,}12d^{\frac{3}{4}}e^{\frac{2}{3}} + 0{,}84d^{\frac{3}{4}}h^{\frac{1}{5}}$
$- 0{,}96e^{\frac{2}{3}}h^{\frac{1}{5}}$.

88. $2{,}25m^{\frac{4}{7}} + 0{,}16n^{-1} + 1{,}44p^{\frac{6}{5}} + 1{,}2m^{\frac{2}{7}}n^{-\frac{1}{2}} - 3{,}6m^{\frac{2}{7}}p^{\frac{3}{5}}$
$- 0{,}96n^{-\frac{1}{2}}p^{\frac{3}{5}}$.

89. $1{,}21x^{\frac{1}{3}} + 2{,}25y^{\frac{2}{5}} + 6{,}25z^{\frac{1}{2}} + 3{,}3x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{5}} - 5{,}5x^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{4}} - 7{,}5y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{4}}$.

90. $0{,}36z^{\frac{4}{3}} + 0{,}64u^2 + 0{,}25v^{\frac{8}{3}} - 0{,}96z^{\frac{2}{3}}u + 0{,}6z^{\frac{2}{3}}v^{\frac{4}{3}} - 0{,}8uv^{\frac{4}{3}}$.

91. $a^{\frac{2}{3}} + 7{,}49a^{\frac{4}{3}} + 12{,}25a^2 - 1{,}4a - 4{,}9a^{\frac{5}{3}}$.

92. $0{,}81b^{\frac{4}{5}} + 81c^{\frac{2}{5}} + 0{,}01d^{\frac{6}{5}} + 16{,}2b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{1}{5}} - 0{,}18b^{\frac{2}{5}}d^{\frac{3}{5}} - 1{,}8c^{\frac{1}{5}}d^{\frac{3}{5}}$.

93. $0{,}16l - 0{,}4l^{\frac{3}{2}} + 0{,}89l^2 - 0{,}8l^{\frac{5}{2}} + 0{,}64l^3$.

94. $9m^{\frac{6}{5}} + 0{,}36m^{\frac{2}{5}} + 2{,}4m - 3{,}44m^{\frac{4}{5}} - 0{,}48m^{\frac{3}{5}}$.

95. $4a^{\frac{4}{3}} + 17a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}} + 4b^{\frac{4}{5}} + 12ab^{\frac{1}{5}} + 12a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$.

96. $25a^{\frac{1}{2}}b^2 + 49a^{\frac{2}{3}}b + 4ab^{\frac{2}{3}} - 70a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{3}{2}} + 20a^{\frac{8}{4}}b^{\frac{4}{3}} - 28a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{5}{6}}$.

97. $16m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{3}} + 4m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{2}} + 25mn^{\frac{2}{5}} + 16m^{\frac{7}{12}}n^{\frac{7}{12}} - 40m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{8}{15}}$
$- 20m^{\frac{5}{6}}n^{\frac{9}{20}}$.

98. $0{,}04x^{\frac{4}{3}} + 15{,}8x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{5}} + 0{,}25y^{\frac{4}{5}} - 1{,}6xy^{\frac{1}{5}} + 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{5}}$.

99. $0{,}36z^{\frac{4}{3}} + u^{\frac{2}{5}}z^{\frac{3}{2}} + 0{,}01u^{-\frac{4}{5}} + 1{,}2u^{\frac{1}{5}}z^{\frac{17}{12}} - 0{,}12u^{-\frac{2}{5}}z^{\frac{2}{3}}$
$- 0{,}2u^{-\frac{1}{5}}z^{\frac{3}{4}}$.

100. $0{,}09a^{\frac{8}{5}}b^{\frac{2}{3}} + 0{,}37a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{4}{3}} + 0{,}04a^{\frac{4}{5}}b^2 - 0{,}3a^{\frac{7}{5}}b - 0{,}2ab^{\frac{5}{3}}$.

101. $9a^{\frac{10}{7}} + 10a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{1}{2}} + 4{,}2a^{\frac{6}{7}}b + 0{,}65a^{\frac{4}{7}}b^{\frac{3}{2}} + 0{,}04a^{\frac{2}{7}}b^2 - 12a^{\frac{9}{7}}b^{\frac{1}{4}}$
$- 7ab^{\frac{3}{4}} - 1{,}8a^{\frac{5}{7}}b^{\frac{5}{4}} - 0{,}2a^{\frac{3}{7}}b^{\frac{7}{4}}$.

102. $0{,}01m^{\frac{12}{5}} - 0{,}02m^2n^{\frac{2}{3}} + 0{,}05m^{\frac{8}{5}}n^{\frac{4}{3}} + 0{,}76m^{\frac{6}{5}}n^2 + m^{\frac{4}{5}}n^{\frac{8}{3}}$
$+ 0{,}04m^{\frac{11}{5}}n^{\frac{1}{3}} - 0{,}04m^{\frac{9}{5}}n - 0{,}64m^{\frac{7}{5}}n^{\frac{5}{3}} - 0{,}8mn^{\frac{7}{3}}$.

103. $16u^{\frac{14}{9}} + 4u^{\frac{4}{3}}v^{-8} + 3u^{\frac{10}{9}}v^{-6} + 5{,}25u^{\frac{8}{9}}v^{-4} + 6{,}25u^{\frac{2}{3}}v^{-2}$
$- 16u^{\frac{13}{9}}v^{-4} + 8u^{\frac{12}{9}}v^{-3} - 4u^{\frac{11}{9}}v^{-2} + 20u^{\frac{10}{9}}v^{-1} - 4u^{\frac{11}{9}}v^{-7}$
$- 11uv^{-5} - 2{,}5u^{\frac{7}{9}}v^{-3}$.

104. $a^{\frac{2}{3}}b^4 + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{18}{5}} + 16a^4b^2 - 2ab^{\frac{19}{5}} + 4a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{17}{5}} - 9a^2b^{\frac{16}{5}}$
$+ 18a^{\frac{7}{3}}b^3 - 3a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{14}{5}} - 4a^3b^{\frac{13}{5}} + 28a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{12}{5}} - 16u^{\frac{11}{3}}b^{\frac{11}{5}}$.

105. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b} + \dfrac{4a^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{a^2}{9b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{4a}{b^{\frac{3}{4}}} + \dfrac{2a^{\frac{4}{3}}}{3b^{\frac{5}{8}}} - \dfrac{4a^{\frac{5}{3}}}{3b^{\frac{3}{8}}}$.

106. $\dfrac{m}{n^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{10m^2}{n^{\frac{4}{3}}} + \dfrac{9m^3}{n^2} - \dfrac{4m^{\frac{3}{2}}}{n} - \dfrac{12m^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}}$.

107. $\dfrac{x^{\frac{10}{3}}}{a^{\frac{8}{5}}} + \dfrac{10x^{\frac{8}{3}}}{a^2} + \dfrac{9x^2}{a^{\frac{12}{5}}} - \dfrac{4x^3}{a^{\frac{9}{5}}} - \dfrac{12x^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{11}{5}}}$.

108. $\dfrac{16u^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{10}{7}}} + \dfrac{9v^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{12}{7}}} + \dfrac{4w^{\frac{2}{5}}}{z^2} - \dfrac{24u^{\frac{3}{5}}v^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}y^{\frac{6}{7}}} + \dfrac{16u^{\frac{3}{5}}w^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}z} - \dfrac{12v^{\frac{2}{5}}w^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{6}{7}}z}.$

109. $\dfrac{4a^{-\frac{4}{3}}}{b^{-1}} + \dfrac{9a^{-\frac{4}{9}}}{b^{-2}} + \dfrac{16a^{-\frac{8}{9}}}{b^{-3}} + \dfrac{12a^{-\frac{8}{9}}}{b^{-\frac{3}{2}}} - \dfrac{16a^{-\frac{10}{9}}}{b^{-2}} - \dfrac{24a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{5}{2}}}.$

110. $\dfrac{1}{x^{-2}} + \dfrac{x^{-1}}{b^2} + \dfrac{9b^2}{z^{-1}} + \dfrac{2}{x^{-\frac{1}{2}}b} - \dfrac{6b}{x^{-1}z^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{6x^{-\frac{1}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}.$

111. $\dfrac{m^{\frac{2}{3}}}{n} + \dfrac{4n}{p^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{9p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{2}{5}}} + \dfrac{4q^{\frac{2}{5}}}{v^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{16v^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{7}}} - \dfrac{4m^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{6m^{\frac{1}{3}}p^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{5}}}$

$- \dfrac{4m^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{6}}} + \dfrac{8m^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{7}}} - \dfrac{12n^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{5}}} + \dfrac{8n^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{5}}}{p^{\frac{1}{4}}v^{\frac{1}{6}}} - \dfrac{16n^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{6}}}{p^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{7}}} - \dfrac{12p^{\frac{1}{4}}}{v^{\frac{1}{6}}}$

$+ \dfrac{24p^{\frac{1}{4}}v^{\frac{1}{6}}}{q^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{7}}} - \dfrac{16q^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{7}}}.$

112. $\dfrac{x^{-10}}{a} + \dfrac{4x^{-8}}{a^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{9x^{-6}}{a^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{16x^{-4}}{a^{\frac{2}{5}}} + \dfrac{25x^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{4x^{-9}}{a^{\frac{5}{6}}} - \dfrac{6x^{-8}}{a^{\frac{3}{4}}}$

$+ \dfrac{8x^{-7}}{a^{\frac{7}{10}}} - \dfrac{10x^{-6}}{a^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{12x^{-7}}{a^{\frac{7}{12}}} + \dfrac{16x^{-6}}{a^{\frac{8}{15}}} - \dfrac{20x^{-5}}{a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{24x^{-5}}{a^{\frac{9}{20}}}$

$+ \dfrac{30x^{-4}}{a^{\frac{5}{12}}} - \dfrac{40x^{-3}}{a^{\frac{11}{30}}}.$

XVII

1. $m^3 + n^3 + p^3 + 3m^2n + 3m^2p + 3n^2p + 3mn^2 + 3mp^2 + 3np^2 + 6mnp.$

2. $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz.$

3. $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc.$

4. $1 + m^3 + n^3 + 3m + 3n + 3m^2n + 3m^2 + 3n^2 + 3mn^2 + 6mn.$

5. $x^3 - y^3 + z^3 - 3x^2y + 3x^2z + 3y^2z + 3xy^2 + 3xz^2$
$- 3yz^2 - 6xyz.$

6. $c^3 - 8d^3 + e^3 - 6c^2d + 3c^2e + 12d^2e + 12cd^2 + 3ce^2$
$- 6de^2 - 12cde.$

7. $8a^3 + 27b^3 - c^3 + 36a^2b - 12a^2c - 27b^2c + 54ab^2$
$+ 6ac^2 + 9bc^2 - 36abc.$

8. $64x^3 + 27y^3 + 8z^3 + 144x^2y + 96x^2z + 54y^2z + 108xy^2$
$+ 48xz^2 + 36yz^2 + 144xyz.$

9. $125a^3 - 343b^3 + 8c^3 - 525a^2b + 150a^2c + 294b^2c$
$+ 735ab^2 + 60ac^2 - 84bc^2 - 420abc.$

10. $1000m^3 - 125n^3 - 8p^3 - 1500m^2n - 600m^2p - 150n^2p$
$+ 750mn^2 + 120mp^2 - 60np^2 + 600mnp.$

11. $64p^6 - 8r^9 + 125x^3 - 96p^4r^3 + 240p^4x + 60r^6x + 48p^2r^6$
$+ 300p^2x^2 - 150r^3x^2 - 240p^2r^3x.$

12. $a^{\frac{3}{2}} - 8b + 27c^{\frac{3}{4}} - 6ab^{\frac{1}{3}} + 9ac^{\frac{1}{4}} + 36b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{4}} + 12a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$
$+ 27a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} - 54b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}} - 36a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}.$

13. $8a^2 - 27b^{\frac{6}{5}} - 64c^{\frac{3}{2}} - 36a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{5}} - 48a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{2}} - 108b^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{2}}$
$+ 54a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}} + 96a^{\frac{2}{3}}c - 144b^{\frac{2}{5}}c + 144a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{1}{2}}.$

14. $27m^{\frac{6}{5}} + 125n^{\frac{3}{2}} - 64p^4 + 135m^{\frac{4}{5}}n^{\frac{1}{2}} - 108m^{\frac{4}{5}}p^{\frac{4}{3}} - 300np^{\frac{4}{3}}$
$+ 225m^{\frac{2}{5}}n + 144m^{\frac{2}{5}}p^{\frac{8}{3}} + 240n^{\frac{1}{2}}p^{\frac{8}{3}} - 360m^{\frac{2}{5}}n^{\frac{1}{2}}p^{\frac{4}{3}}.$

15. $b^{-3} - 8c^{\frac{3}{4}} + 27d^{-2} - 6b^{-2}c^{\frac{1}{4}} + 9b^{-2}d^{-\frac{2}{3}} + 36c^{\frac{1}{2}}d^{-\frac{2}{3}}$
$+ 12b^{-1}c^{\frac{1}{2}} + 27b^{-1}d^{-\frac{4}{3}} - 54c^{\frac{1}{4}}d^{-\frac{4}{3}} - 36b^{-1}c^{\frac{1}{4}}d^{-\frac{2}{3}}.$

16. $27x^{-\frac{6}{5}} - 512y^{-\frac{12}{7}} + 125z^{-\frac{3}{2}} - 216x^{-\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{7}} + 135x^{-\frac{4}{5}}z^{-\frac{1}{2}}$
$+ 960y^{-\frac{8}{7}}z^{-\frac{1}{2}} + 576x^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{8}{7}} + 225x^{-\frac{2}{5}}z^{-1} - 600y^{-\frac{4}{7}}z^{-1}$
$- 720x^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{7}}z^{-\frac{1}{2}}.$

17. $8u^{\frac{9}{4}} + 64v^{\frac{12}{5}} + 512x^{\frac{5}{2}} + 48u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{4}{5}} + 96u^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{6}} + 384v^{\frac{8}{5}}x^{\frac{5}{6}}$
$+ 96u^{\frac{3}{4}}v^{\frac{8}{5}} + 384u^{\frac{3}{4}}x^{\frac{5}{3}} + 768v^{\frac{4}{5}}x^{\frac{5}{3}} + 384u^{\frac{3}{4}}v^{\frac{4}{5}}x^{\frac{5}{6}}.$

18. $27b^{\frac{6}{5}} + 125b^{\frac{12}{7}} - 343b^{\frac{3}{2}} + 135b^{\frac{48}{35}} - 189b^{\frac{13}{10}} - 525b^{\frac{23}{14}}$
$+ 225b^{\frac{54}{35}} + 441b^{\frac{7}{5}} + 735b^{\frac{11}{7}} - 630b^{\frac{103}{70}}$.

19. $a^{\frac{3}{4}} - 8b + 27c^{\frac{3}{2}} - 64d^{\frac{3}{5}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 9a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} - 12a^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{5}}$
$+ 36b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{2}} - 48b^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{5}} - 108cd^{\frac{1}{5}} + 12a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}} + 27a^{\frac{1}{4}}c$
$+ 48a^{\frac{1}{4}}d^{\frac{2}{5}} - 54b^{\frac{1}{3}}c - 96b^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{5}} + 144c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{2}{5}} - 36a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$
$+ 48a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{5}} - 72a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{5}} + 144b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{5}}$.

20. $343x^{-6} - 125y^{-9} + 8z^{-12} - u^{-15} - 735x^{-4}y^{-3} + 294x^{-4}z^{-4}$
$- 147x^{-4}u^{-5} + 150y^{-6}z^{-4} - 75y^{-6}u^{-5} - 12z^{-8}u^{-5}$
$+ 525x^{-2}y^{-6} + 84x^{-2}z^{-8} + 21x^{-2}u^{-10} - 60y^{-3}z^{-8}$
$- 15y^{-3}u^{-10} + 6z^{-4}u^{-10} - 420x^{-2}y^{-3}z^{-4} + 210x^{-2}y^{-3}u^{-5}$
$- 84x^{-2}z^{-4}u^{-5} + 60y^{-3}z^{-4}u^{-5}$.

21. $8m^{-\frac{12}{5}} - n^{-\frac{9}{5}} + 27p^{\frac{6}{5}} - q^{\frac{3}{5}} - 12m^{-\frac{8}{5}}n^{-\frac{3}{5}} + 36m^{-\frac{8}{5}}p^{\frac{2}{5}}$
$- 12m^{-\frac{8}{5}}q^{\frac{1}{5}} + 9n^{-\frac{6}{5}}p^{\frac{2}{5}} - 3n^{-\frac{6}{5}}q^{\frac{1}{5}} - 27p^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{5}} + 6m^{-\frac{4}{5}}n^{-\frac{6}{5}}$
$+ 54m^{-\frac{4}{5}}p^{\frac{4}{5}} + 6m^{-\frac{4}{5}}q^{\frac{2}{5}} - 27n^{-\frac{3}{5}}p^{\frac{4}{5}} - 3n^{-\frac{3}{5}}q^{\frac{2}{5}} + 9p^{\frac{2}{5}}q^{\frac{2}{5}}$
$- 36m^{-\frac{4}{5}}n^{-\frac{3}{5}}p^{\frac{2}{5}} + 12m^{-\frac{4}{5}}n^{-\frac{3}{5}}q^{\frac{1}{5}} - 36m^{-\frac{4}{5}}p^{\frac{2}{5}}q^{\frac{1}{5}}$
$+ 18n^{-\frac{8}{5}}p^{\frac{2}{5}}q^{\frac{1}{5}}$.

22. $8a^{-12}b^{-3} + 87a^{-9}b^{-6} - 22a^{-6}b^{-9} - a^{-3}b^{-12} + 36a^{-11}b^{-4}$
$+ 78a^{-10}b^{-5} - 15a^{-7}b^{-8} - 3a^{-5}b^{-10} + 42a^{-8}b^{-7}$
$+ 6a^{-4}b^{-11}$.

23. $x^{\frac{12}{5}}y - 50x^{\frac{9}{5}}y^{2} + 111x^{\frac{6}{5}}y^{3} - 8x^{\frac{3}{5}}y^{4} - 6x^{\frac{11}{5}}y^{\frac{4}{3}} + 21x^{2}y^{\frac{5}{3}}$
$+ 87x^{\frac{8}{5}}y^{\frac{7}{3}} - 114x^{\frac{7}{5}}y^{\frac{8}{3}} - 78xy^{\frac{10}{3}} + 36x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{11}{3}}$.

24. $x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{4}{9}} + 21x^{\frac{5}{9}} - 32x^{\frac{2}{3}} + 144x^{\frac{8}{9}} - 291x + 252x^{\frac{10}{9}}$
$+ 252x^{\frac{11}{9}} - 752x^{\frac{4}{3}} + 885x^{\frac{13}{9}} - 168x^{\frac{14}{9}} - 521x^{\frac{5}{3}}$
$+ 882x^{\frac{16}{9}} - 540x^{\frac{17}{9}} + 216x^{2}$.

25. $\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{27} + \frac{z^3}{64} - \frac{x^2y}{4} + \frac{3x^2z}{16} + \frac{y^2z}{12} + \frac{xy^2}{6} + \frac{3xz^2}{32}$
$- \frac{yz^2}{16} - \frac{xyz}{4}.$

26. $\frac{a^3}{27} + \frac{b^3}{8} + \frac{c^3}{125} + \frac{a^2b}{6} + \frac{a^2c}{15} + \frac{3b^2c}{20} + \frac{ab^2}{4} + \frac{ac^2}{25}$
$+ \frac{3bc^2}{50} + \frac{abc}{5}.$

27. $\frac{m^3}{64} - \frac{1}{125} + \frac{n^3}{8} - \frac{3m^2}{80} + \frac{3m^2n}{32} + \frac{3n}{50} + \frac{3m}{100} + \frac{3mn^2}{16}$
$- \frac{3n^2}{20} - \frac{3mn}{20}.$

28. $\frac{8a^3}{m^3} + \frac{b^3}{n^3} - \frac{27c^3}{p^3} + \frac{12a^2b}{m^2n} - \frac{36a^2c}{m^2p} - \frac{9b^2c}{n^2p} + \frac{6ab^2}{mn^2}$
$+ \frac{54ac^2}{mp^2} + \frac{27bc^2}{np^2} - \frac{36abc}{mnp}.$

29. $\frac{125a^6}{x^3} - \frac{27b^9}{y^3} + \frac{8c^3}{z^3} - \frac{225a^4b^3}{x^2y} + \frac{150a^4c}{x^2z} + \frac{54b^6c}{y^2z}$
$+ \frac{135a^2b^6}{xy^2} + \frac{60a^2c^2}{xz^2} - \frac{36b^3c^2}{yz^2} - \frac{180a^2b^3c}{xyz}.$

30. $\frac{x^3}{8a^3} + \frac{y^6}{27b^9} - \frac{z^{12}}{125c^3} + \frac{x^2y^2}{4a^2b^3} - \frac{3x^2z^4}{20a^2c} - \frac{y^4z^4}{15b^6c}$
$+ \frac{xy^4}{6ab^6} + \frac{3xz^8}{50ac^2} + \frac{y^2z^8}{25b^3c^2} - \frac{xy^2z^4}{5ab^3c}.$

31. $\frac{27a^6}{x^9} - \frac{125b^9}{x^6} + \frac{343b^{12}}{x^3} - \frac{135a^4b^3}{x^8} + \frac{189a^4b^4}{x^7} + \frac{525b^{10}}{x^5}$
$+ \frac{225a^2b^6}{x^7} + \frac{441a^2b^8}{x^5} - \frac{735b^{11}}{x^4} - \frac{630a^2b^7}{x^6}.$

32. $\frac{27a^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{8ab^{\frac{3}{5}}}{27y^{\frac{3}{2}}} + \frac{8b^{\frac{6}{5}}}{z} - \frac{18a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{5}}}{xy^{\frac{1}{2}}} + \frac{54a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{xz^{\frac{1}{3}}} + \frac{8a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}}{3yz^{\frac{1}{3}}} + \frac{4a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}y}$
$+ \frac{36a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{3}}} - \frac{8a^{\frac{1}{3}}b}{y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{3}}} - \frac{24ab^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}.$

33. $\frac{8a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{5}}} - \frac{bx^{\frac{6}{5}}}{27a^3} - \frac{64a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{5}}}{bc^{\frac{3}{4}}} - 4b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}} - \frac{48a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{5}}} - \frac{4b^{\frac{1}{3}}x}{3a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{4}}}$

$+ \frac{2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{5}}}{3a^{\frac{3}{2}}} + \frac{96a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{4}}} - \frac{16x^{\frac{4}{5}}}{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}} + 16x^{\frac{2}{5}}.$

34 $\frac{m^2}{x^3} - \frac{8m^3n^3}{p^3x^3} - \frac{p^2}{m^3} - \frac{6m^{\frac{7}{3}}n}{px^3} - \frac{3m^{\frac{1}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{x^2} - \frac{12mn^2}{p^{\frac{4}{3}}x^2} + \frac{12m^{\frac{8}{3}}n^2}{p^2x^3}$

$+ \frac{3p^{\frac{4}{3}}}{m^{\frac{4}{3}}x} - \frac{6np^{\frac{1}{3}}}{mx} + \frac{12m^{\frac{2}{3}}n}{p^{\frac{1}{3}}x^2}.$

35. $\frac{27a^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{9}{2}}} + \frac{64x}{a^{\frac{3}{4}}} - \frac{125a^{\frac{3}{2}}}{c^6} + \frac{108a^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{8}{3}}} - \frac{135a}{c^2x^3} - \frac{240x^{\frac{2}{3}}}{c^2} + \frac{144}{a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{5}{6}}}$

$+ \frac{225a^{\frac{5}{4}}}{c^4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{300a^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{3}}}{c^4} - \frac{360a^{\frac{1}{2}}}{c^2x^{\frac{7}{6}}}.$

36. $\frac{64a^{\frac{3}{2}}b}{125x^{\frac{9}{2}}y^3} - \frac{125a^{\frac{3}{5}}x^3}{512b^3y^{12}} - \frac{27a^{24}x^{\frac{9}{5}}}{64by^{21}} - \frac{6a^{\frac{6}{5}}}{5b^{\frac{1}{3}}y^6x^2} - \frac{36a^9b^{\frac{1}{3}}}{25x^{\frac{12}{5}}y^2} -$

$\frac{225a^{\frac{42}{5}}x^{\frac{13}{5}}}{256b^{\frac{7}{3}}y^{15}} + \frac{15a^{\frac{9}{10}}x^{\frac{1}{2}}}{16b^{\frac{5}{3}}y^9} + \frac{27a^{\frac{33}{2}}}{20b^{\frac{1}{3}}y^{15}x^{\frac{3}{10}}} - \frac{135a^{\frac{84}{5}}x^{\frac{11}{5}}}{128b^{\frac{5}{3}}y^{18}} + \frac{9a^{\frac{87}{10}}x^{\frac{1}{10}}}{4by^{12}}.$

37. $\frac{8x^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{5}}}{a^9b^3} + \frac{27a^3z^{\frac{6}{5}}}{b^6x^{\frac{3}{2}}} - \frac{125b^3z^{\frac{9}{5}}}{a^3x^{\frac{9}{2}}} + \frac{36x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{4}{5}}}{a^5b^4} - \frac{60z}{a^7bx^{\frac{1}{2}}} - \frac{135az^{\frac{7}{5}}}{b^3x^{\frac{5}{2}}}$

$+ \frac{54z}{ab^5x^{\frac{1}{2}}} + \frac{150bz^{\frac{7}{5}}}{a^5x^{\frac{5}{2}}} + \frac{225z^{\frac{8}{5}}}{ax^{\frac{7}{2}}} - \frac{180z^{\frac{6}{5}}}{a^3b^2x^{\frac{3}{2}}}.$

38. $\frac{343m^{\frac{9}{5}}y^{\frac{3}{5}}}{n^2z^3} + \frac{8n^2z^3}{m^{\frac{9}{5}}y^{\frac{3}{5}}} + \frac{27y^{\frac{6}{5}}z^{12}}{m^3n^2} + \frac{294m^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{2}{3}}z} + \frac{441m^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}z^2}{n^2}$

$+ \frac{36n^{\frac{2}{3}}z^6}{m^{\frac{11}{5}}} + \frac{84n^{\frac{2}{3}}z}{m^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}} + \frac{189yz^7}{m^{\frac{7}{5}}n^2} + \frac{54y^{\frac{3}{5}}z^9}{m^{\frac{13}{5}}n^{\frac{2}{3}}} + \frac{252y^{\frac{2}{5}}z^4}{mn^{\frac{2}{3}}}.$

39. $$\frac{125a^3x^{\frac{6}{5}}}{27m^3} - \frac{27b^3z^9}{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{5}}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}y^3}{8b^3x^{\frac{6}{5}}} - \frac{25a^{\frac{3}{2}}bx^{\frac{3}{5}}z^3}{m^2} + \frac{25a^{\frac{5}{2}}x^{\frac{2}{5}}y}{6bm^2}$$
$$+ \frac{27byz^6}{2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{4}{5}}} + \frac{5b^2z^6}{m} + \frac{5ay^2}{12b^2mx^{\frac{2}{5}}} - \frac{9y^2z^3}{4a^{\frac{1}{2}}bx} - \frac{15ayz^3}{mx^{\frac{1}{5}}}.$$

40. $$\frac{8a}{x^{\frac{8}{7}}} - \frac{27b^{\frac{6}{5}}}{y^9} + \frac{125c^{\frac{9}{4}}}{z^6} - \frac{d^{\frac{12}{5}}}{u^{\frac{3}{2}}} - \frac{36a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{2}{7}}y^3} + \frac{60a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{7}}z^2} - \frac{12a^{\frac{2}{3}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{7}}}$$
$$+ \frac{135b^{\frac{4}{5}}c^{\frac{3}{4}}}{y^6z^2} - \frac{27b^{\frac{4}{5}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}y^6} - \frac{75c^{\frac{3}{2}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}z^4} + \frac{54a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{7}}y^6} + \frac{150a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{7}}z^4}$$
$$+ \frac{6a^{\frac{1}{3}}d^{\frac{8}{5}}}{ux^{\frac{1}{7}}} - \frac{225b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{3}{2}}}{y^3z^4} - \frac{9b^{\frac{2}{5}}d^{\frac{8}{5}}}{uy^3} + \frac{15c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{8}{5}}}{uz^2} - \frac{180a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{7}}y^3z^2}$$
$$+ \frac{36a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{5}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{7}}y^3} - \frac{60a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{7}}z^2} + \frac{90b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}y^3z^2}.$$

41. $$\frac{8a^6b^{-\frac{3}{2}}}{c^3x^{-1}} + \frac{27c^{\frac{8}{4}}x^{-1}}{a^3b^3} - \frac{8d^9y^{-2}}{b^6c^{\frac{3}{4}}} + \frac{b^{-\frac{9}{2}}}{d^3y^{-2}} + \frac{36a^3c^{-\frac{7}{4}}x^{\frac{1}{3}}}{b^2}$$
$$- \frac{24a^4d^3y^{-\frac{2}{3}}}{b^3c^{\frac{9}{4}}x^{-\frac{2}{3}}} + \frac{12a^4b^{-\frac{5}{2}}}{c^2dx^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} - \frac{54c^{\frac{1}{4}}d^3x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{a^2b^4} + \frac{27c^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{2}{3}}}{a^2b^{\frac{7}{2}}dy^{-\frac{2}{3}}}$$
$$+ \frac{12d^5y^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{11}{2}}c^{\frac{1}{2}}} + \frac{54x^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{2}}} + \frac{24a^2d^6y^{-\frac{4}{3}}}{b^{\frac{9}{2}}c^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}} + \frac{6a^2b^{-\frac{7}{2}}}{cd^2x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}}$$
$$+ \frac{36d^6x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}}{ab^5c^{\frac{1}{4}}} + \frac{9c^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{3}}}{ab^4d^2y^{-\frac{4}{3}}} - \frac{6d}{b^5c^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{2}{3}}} - \frac{72ad^3y^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{7}{2}}c}$$
$$+ \frac{36ab^{-3}}{c^{\frac{3}{4}}dy^{-\frac{2}{3}}} - \frac{24a^2b^{-4}d^2}{c^{\frac{5}{4}}x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{36d^2x^{-\frac{1}{3}}}{ab^{\frac{9}{2}}}.$$

42. $$\frac{27a^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{12}{7}}} - \frac{64a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{3}{2}}}{y} + \frac{125a^{\frac{2}{5}}b^2}{z^{\frac{3}{2}}} - \frac{8b^{\frac{9}{4}}}{u^{\frac{3}{5}}} - \frac{108a^{\frac{8}{5}}b^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}y^{\frac{1}{3}}} + \frac{135a^{\frac{7}{5}}b^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{8}{7}}z^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{54a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{8}{7}}u^{\frac{1}{5}}} + \frac{240ab^{\frac{5}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}} - \frac{96a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{5}}} - \frac{150a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{25}{12}}}{zu^{\frac{1}{5}}} + \frac{144a^{\frac{7}{5}}b}{x^{\frac{4}{7}}y^{\frac{2}{3}}}$$

$$+ \frac{225ab^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{7}}z} + \frac{36a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{4}{7}}u^{\frac{2}{5}}} - \frac{300a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{11}{6}}}{y^{\frac{1}{3}}z} - \frac{48a^{\frac{2}{5}}b^{2}}{y^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{5}}} + \frac{60a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{13}{6}}}{z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{2}{5}}}$$

$$- \frac{360a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{4}{7}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}} + \frac{144ab^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{4}{7}}y^{\frac{1}{3}}u^{\frac{1}{5}}} - \frac{180a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{17}{12}}}{x^{\frac{4}{7}}z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{5}}} + \frac{240a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{23}{12}}}{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{5}}}.$$

43. $$\frac{a^3}{x^{\frac{18}{7}}} - \frac{6a^{\frac{14}{5}}}{x^{\frac{17}{7}}} + \frac{24a^{\frac{13}{5}}}{x^{\frac{16}{7}}} - \frac{65a^{\frac{12}{5}}}{x^{\frac{15}{7}}} + \frac{147a^{\frac{11}{5}}}{x^{2}} - \frac{270a^{2}}{x^{\frac{13}{7}}} + \frac{439a^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{12}{7}}}$$

$$- \frac{600a^{\frac{8}{5}}}{x^{\frac{11}{7}}} + \frac{735a^{\frac{7}{5}}}{x^{\frac{10}{7}}} - \frac{765a^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{9}{7}}} + \frac{711a}{x^{\frac{8}{7}}} - \frac{543a^{\frac{4}{5}}}{x} + \frac{353a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{6}{7}}}$$

$$- \frac{186a^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}} + \frac{60a^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{4}{7}}} - \frac{8}{x^{\frac{3}{7}}}.$$

CHAPITRE II

CALCUL DES RADICAUX. — RACINE CARRÉE ; RACINE CUBIQUE

XVIII

1. 2.	**2.** 5.	**3.** 3.	**4.** 12.	**5.** 20.
6. 6.	**7.** 3.	**8.** 10.	**9.** 20.	**10.** 11.
11. 25.	**12.** 3.	**13.** 0,4.	**14.** 0,05.	**15.** 21.
16. 25.	**17.** 32.	**18.** 27.	**19.** 6.	**20.** 45.
21. 15.	**22.** $\frac{2}{3}$.	**23.** $\frac{5}{6}$.	**24.** 3.	**25.** 11.

26. $\frac{6}{7}$. **27.** $\frac{1}{3}$. **28.** $\frac{3}{5}$. **29.** $\frac{5}{2}$. **30.** $3\frac{1}{5}$.

31. $3\frac{1}{2}$. **32.** $13\frac{1}{3}$. **33.** $3\frac{1}{2}$. **34.** 5. **35.** $2\frac{1}{2}$.

36. $\frac{3}{2}$. **37.** 4. **38.** 8. **39.** $\frac{1}{5}\sqrt[4]{256 \times 10000} = \frac{4 \times 10}{5} = 8$.

40. $\frac{1}{20}$.

I. TRANSFORMATION DES RADICAUX

XIX

1. Introduction sous le radical du coefficient de ce dernier.

1. $\sqrt{8}$. **2.** $\sqrt{175}$. **3.** $\sqrt{180}$. **4.** $\sqrt{84}$.

5. $\sqrt[3]{54}$. **6.** $\sqrt[3]{1029}$. **7.** $\sqrt[3]{2560}$. **8.** $\sqrt[4]{1024}$.

9. $\sqrt[5]{96}$. **10.** $\sqrt[7]{4374}$. **11.** $\sqrt[3]{4000}$. **12.** $\sqrt[3]{7290}$.

13. $\sqrt{2624}$. **14.** $\sqrt{5a^2}$. **15.** $\sqrt[4]{2x^4}$. **16.** $\sqrt[5]{6y^5}$.

17. $\sqrt[3]{7z^3}$. **18.** $\sqrt[4]{6b^4}$. **19.** $\sqrt[5]{-7d^5}$. **20.** $-\sqrt[6]{10m^6}$.

21. $\sqrt[3]{-15n^3}$. **22.** $-\sqrt{9a}$. **23.** $\sqrt[3]{-125b}$. **24.** $\sqrt[5]{-32x}$.

25. $-\sqrt[4]{256y}$. **26.** $\sqrt{9bx}$. **27.** $\sqrt{a^2b}$. **28.** $\sqrt{m^4yz^3}$.

29. $\sqrt[5]{n^{15}xy^2}$. **30.** $-\sqrt[4]{a^{12}m^2n}$. **31.** $\sqrt[3]{-x^{15}y^4z}$. **32.** $\sqrt{\frac{a}{4}}$.

33. $\sqrt[3]{\frac{8m^2}{27}}$. **34.** $\sqrt[4]{\frac{625z^5}{1296}}$. **35.** $\sqrt[5]{\frac{243d^3}{1024}}$. **36.** $\sqrt[3]{\frac{27e^2}{49}}$.

37. $\sqrt[3]{\frac{125m}{18}}$. **38.** $\sqrt[3]{\frac{128y^5}{81}}$. **39.** $\sqrt[4]{\frac{49m^3}{8}}$. **40.** $\sqrt{\frac{4a}{9b}}$

41. $\sqrt[3]{\frac{m^3x}{n^3y}}$. **42.** $\sqrt[5]{\frac{x^5}{yz^3}}$. **43.** $\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$. **44.** $\sqrt[3]{\frac{m}{a^3n^2}}$.

45. $\sqrt[5]{\frac{m^3}{q^5}}$. **46.** $\sqrt[3]{-\frac{ax^3}{by^3}}$. **47.** $-\sqrt{\frac{b}{a^2c}}$. **48.** $\sqrt[5]{-ax^3}$.

49. $\sqrt[5]{m^5 - 1}$. **50.** $\sqrt[3]{b - ay}$. **51.** $-\sqrt[4]{\frac{z}{y}(a - b)}$.

52. $\sqrt{a^2 - b^2}$. **53.** $\sqrt{\frac{m + n}{m - n}}$. **54.** $\sqrt{\frac{b}{b + c}}$.

55. $\sqrt[3]{3(a + b - c)}$. **56.** $\sqrt[5]{2x - 3y}$. **57.** $\sqrt[16]{3}$. **58.** $\sqrt[32]{5}$.

59. $\sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2}$.

XX

2. Mise en évidence d'un facteur devant le radical.

1. $\sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. **2.** $2\sqrt{3}$. **3.** $2\sqrt{7}$. **4.** $5\sqrt{2}$. **5.** $6\sqrt{2}$.

6. $2\sqrt[3]{9}$. **7.** $5\sqrt[3]{4}$. **8.** $3\sqrt[3]{4}$. **9.** $4\sqrt[3]{3}$. **10.** $2\sqrt[3]{7}$. **11.** $2\sqrt[5]{5}$.

12. $4\sqrt[5]{2}$. **13.** $3\sqrt[6]{5}$. **14.** $3\sqrt[4]{7}$. **15.** $2\sqrt[4]{7}$. **16.** $18\sqrt{5}$. **17.** $18\sqrt[3]{4}$.

18. $10\sqrt[4]{9}$. **19.** $a\sqrt{b}$. **20.** $m\sqrt[3]{n^2}$. **21.** $b^2\sqrt[4]{d^3}$. **22.** $b\sqrt[4]{c}$.

23. $c^3\sqrt[5]{x^2}$. **24.** $x^2y\sqrt[3]{y}$. **25.** $y^2z\sqrt{z}$. **26.** $m^3n^2\sqrt[3]{n}$. **27.** $xy\sqrt[4]{xy^2}$.

28. $uv^3\sqrt[3]{uv}$. **29.** $yz^2\sqrt[4]{y^3}$. **30.** $ab\sqrt[10]{a^2b^5}$. **31.** $2a\sqrt{b}$. **32.** $5m^2\sqrt{x}$.

33. $6ab\sqrt{a}$. **34.** $4x^2\sqrt[3]{y}$. **35.** $3m\sqrt[4]{m^2n^2}$. **36.** $2ab\sqrt[6]{a^2}$.

37. $8c^2\sqrt{5d}$. **38.** $\frac{2a}{3}\sqrt{ab}$. **39.** $\frac{5}{6n^2}\sqrt[3]{m^2n}$. **40.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{a}$.

41. $\frac{m}{3}\sqrt[5]{mn}$. **42.** $\frac{xy}{6}\sqrt[4]{xy^2}$. **43.** $\frac{m - n}{7}\sqrt{y}$. **44.** $\frac{x - 1}{8}\sqrt[3]{z^2}$.

45. $\frac{x^2 - y^2}{2}\sqrt{x - y}$. **46.** $\frac{9y^{10} - 25z^6}{3}\sqrt[4]{3y^5 + 5z^3}$.

47. $(2x - 3y^3)\sqrt[3]{2x + 3y^3}$. **48.** $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{6a^2b}$. **49.** $\frac{2y}{7}\sqrt{35xy}$.

50. $\frac{1}{m}\sqrt[3]{x^4 - m^3}$. **51.** $\frac{a}{2}\sqrt[5]{16a(2 - 7a)}$. **52.** $\frac{1}{3}\sqrt[8]{6561x - 3a}$.

53. $\frac{2a}{3}\sqrt{3a(9 - 2a)}$. **54.** $\frac{1}{b}\sqrt{a + b}$. **55.** $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt[3]{m - an}$.

56. $\frac{1}{xyz}\sqrt{xz - yz + xy}$. **57.** $(x^3 + y^3)\sqrt{x^3 - y^3}$.

58. $\frac{ab}{a - b}\sqrt[3]{ab(a - b)}$. **59.** $\frac{x - 1}{xz^2}\sqrt[3]{x^2z^2}$. **60.** $\frac{5(a^3 - b^3)}{3b}\sqrt[3]{x^2}$.

XXI

3. Réduction des radicaux au même indice.

1. $\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27};\ \sqrt[6]{4}$. **2.** $\sqrt[4]{6};\ \sqrt[4]{49}$. **3.** $\sqrt[8]{32};\ \sqrt[8]{25}$.

4. $\sqrt[10]{100};\ \sqrt[10]{1600}$. (ou $\sqrt[5]{10};\ \sqrt[5]{40}$.) **5.** $\sqrt[6]{125};\ \sqrt[6]{16}$.

6. $\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16};\ \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$. **7.** $\sqrt[9]{125};\ \sqrt[9]{25}$.

8. $\sqrt[12]{1728};\ \sqrt[12]{4}$. **9.** $\sqrt[10]{64};\ \sqrt[10]{32}$. **10.** $\sqrt[12]{256};\ \sqrt[12]{512}$.

11. $\sqrt[21]{1331};\ \sqrt[21]{4}$. **12.** $\sqrt[15]{512};\ \sqrt[15]{25^5}$. **13.** $\sqrt[12]{64};\ \sqrt[12]{625};\ \sqrt[12]{216}$.

14. $\sqrt[20]{16807};\ \sqrt[20]{625};\ \sqrt[20]{14400}$. **15.** $\sqrt[60]{80^{20}};\ \sqrt[60]{50^{15}};\ \sqrt[60]{2^{12}}$.

16. $\sqrt[70]{3^{35}};\ \sqrt[70]{8^{14}};\ \sqrt[70]{4^{10}}$. **17.** $\sqrt[18]{64};\ \sqrt[18]{8000};\ \sqrt[18]{144}$.

18. $\sqrt[40]{5^{10}};\ \sqrt[40]{3^8};\ \sqrt[40]{5^5}$. **19.** $\sqrt[60]{0{,}2^{20}};\ \sqrt[60]{0{,}5^{15}};\ \sqrt[60]{0{,}03^{12}}$.

20. $\sqrt[36]{0{,}1^4};\ \sqrt[36]{0{,}08^9};\ \sqrt[36]{9^{18}}$. **21.** $\sqrt[105]{21^{15}};\ \sqrt[105]{16^{35}};\ \sqrt[105]{0{,}8^{21}}$.

22. $\sqrt[20]{\frac{3^{10}}{4^{10}}};\ \sqrt[20]{\frac{2^4}{3^4}};\ \sqrt[20]{\frac{5^5}{6^5}}$. **23.** $\sqrt[12]{\frac{1}{16}};\ \sqrt[12]{\frac{125}{512}};\ \sqrt[12]{\frac{3^6}{5^6}}$.

24. $\sqrt[10]{\frac{4}{81}};\ \sqrt[10]{\frac{7^5}{10^5}};\ \sqrt[10]{\frac{121}{320}}$. **25.** $\sqrt[14]{\frac{25}{49}};\ \sqrt[14]{\frac{2187}{128}};\ \sqrt[14]{\frac{2}{11}}$.

26. $\sqrt[24]{\frac{512}{1331}};\ \sqrt[24]{\frac{1}{4096}};\ \sqrt[24]{\frac{7^8}{9^8}};\ \sqrt[24]{\frac{81}{256}}$.

27. $\sqrt[42]{0{,}3^6};\ \sqrt[42]{\frac{128}{2187}};\ \sqrt[42]{\frac{144}{289}}$.

---

28. $\sqrt[6]{a^3};\ \sqrt[6]{b^2};\ \sqrt[6]{c}$. **29.** $\sqrt[12]{a^4};\ \sqrt[12]{a^3}$. **30.** $\sqrt[15]{a^6};\ \sqrt[15]{a^5}$.

31. $\sqrt[12]{m^3};\ \sqrt[12]{m^8}$. **32.** $\sqrt[21]{x^9};\ \sqrt[21]{x^{35}}$. **33.** $\sqrt[12]{y^3};\ \sqrt[12]{y^8};\ \sqrt[12]{y^{18}}$.

34. $\sqrt[12]{a^8}$; $\sqrt[12]{a^9}$; $\sqrt[12]{a^{10}}$. **35.** $\sqrt[30]{\frac{x^{15}}{y^{30}}}$; $\sqrt[30]{\frac{y^{18}}{z^6}}$; $\sqrt[30]{\frac{a^{10}}{b^{10}}}$.

36. $\sqrt[30]{\frac{m^{10}}{n^{15}}}$; $\sqrt[30]{\frac{1}{y^{24}}}$; $\sqrt[30]{\frac{n^{10}}{y^{20}}}$. **37.** $\sqrt[42]{\frac{x^{12}}{y^6}}$; $\sqrt[42]{\frac{z^{21}}{y^{42}}}$; $\sqrt[42]{\frac{4^{14}}{z^{14}}}$.

38. $\sqrt[28]{\frac{(a-b)^7}{z^7}}$; $\sqrt[28]{\frac{(a+b)^{14}}{z^{28}}}$; $\sqrt[28]{\frac{(a^2-b^2)^4}{z^{12}}}$.

39. $\sqrt[24]{\frac{1}{(a-x)^3}}$; $\sqrt[24]{\frac{256}{(a-x)^8}}$; $\sqrt[24]{\frac{729}{(a-x)^6}}$.

40. $\sqrt[mnp]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{np}}$; $\sqrt[mnp]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{mp}}$; $\sqrt[mnp]{\left(\frac{x-1}{x+p}\right)^{mn}}$.

41. $\sqrt[6m]{\frac{x-y}{a-b}}$; $\sqrt[6m]{\left(\frac{y-x}{b-a}\right)^2}$; $\sqrt[6m]{\left(\frac{b-a}{y-x}\right)^3}$.

42. $\sqrt[12mn]{\left(\frac{x}{y}\right)^{3mn}}$; $\sqrt[12mn]{\left(\frac{y}{z}\right)^{12n}}$; $\sqrt[12mn]{\left(\frac{z}{u}\right)^{12m}}$; $\sqrt[12mn]{\left(\frac{x}{z}\right)^{4mn}}$.

43. $\sqrt[4m(m+1)]{\frac{a^{4m}}{x^{8m}}}$; $\sqrt[4m(m+1)]{\frac{a^{2m(m+1)}}{x^{m(m+1)}}}$; $\sqrt[4m(m+1)]{\left(\frac{a}{x}\right)^{12(m+1)}}$.

44. $\sqrt[12]{a^{-6}}$; $\sqrt[12]{a^{-20}}$; $\sqrt[12]{a^{-6}b^3}$. **45.** $\sqrt[mnp]{x^{-2np}}$; $\sqrt[mnp]{x^{mp}}$; $\sqrt[mnp]{x^{-mn}}$.

46. $\sqrt[3mn]{(x-1)^{-3n}}$; $\sqrt[3mn]{(x-1)^{-mnp}}$; $\sqrt[3mn]{(x-1)^{-6m}}$.

47. $\sqrt[6]{8x^3}$; $\sqrt[6]{9(x-1)^8}$; $\sqrt[6]{a(x-2)^2}$.

48. $\sqrt[30]{m^6(x+y)^{12}}$; $\sqrt[30]{a^{-10}(x-y)^{10}}$; $\sqrt[30]{2^{15}a^{15}}$.

49. $\sqrt[6]{\frac{1}{x^3}}$; $\sqrt[6]{\frac{3(b-c)^2}{y}}$; $\sqrt[6]{\frac{25}{a^2(b+c)^2}}$.

50. $\sqrt[16]{a^8b^{16}c^{24}}$; $\sqrt[16]{\frac{256(a-1)^4}{81}}$; $\sqrt[16]{\frac{81(a+1)^2}{b^2c^4}}$; $\sqrt[16]{\frac{5m}{a+b}}$.

51. $\sqrt[12]{\frac{m^{12}n^6}{y^{18}}}$; $\sqrt[12]{\frac{x^2}{y^4}}$; $\sqrt[12]{\frac{x^9}{z^{15}}}$.

52. $\sqrt[6]{\frac{a^4y^2}{z^6}}$; $\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^6}}$; $\sqrt[6]{\frac{x^4y^2}{z^4}}$; $\sqrt[6]{\frac{x^6y^3}{z^{12}}}$.

53. $\sqrt[4]{a^4(x-1)^6}$; $\sqrt[4]{\frac{b^2(x-1)^3}{y^2}}$; $\sqrt[4]{\frac{c^6(x-1)^6}{z^4}}$.

54. $\sqrt[6]{\frac{m^4}{n^6}}$; $\sqrt[6]{\frac{z^3}{y^6}}$; $\sqrt[6]{\frac{u^3}{y^9}}$; $\sqrt[6]{\frac{v^4}{x^8}}$.

XXII

4. Transformation de radicaux en racines semblables.

1. $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$. **2.** $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. **3.** $3\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$. **4.** $6\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.

5. $3\sqrt{11}$; $4\sqrt{11}$. **6.** $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{2}$. **7.** $2\sqrt[3]{9}$; $3\sqrt[3]{9}$. **8.** $\sqrt[4]{5}$; $3\sqrt[4]{5}$.

9. $3\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$. **10.** $21\sqrt[3]{2}$; $6\sqrt[3]{2}$; $6\sqrt[3]{2}$. **11.** $3\sqrt{3}$; $8\sqrt{3}$; $18\sqrt{3}$.

12. $4\sqrt[3]{2}$; $7\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{2}$. **13.** $3\sqrt[4]{2}$; $6\sqrt[4]{2}$; $6\sqrt[4]{2}$. **14.** $2\sqrt{\frac{1}{3}}$; $10\sqrt{\frac{1}{3}}$.

15. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$. **16.** $\frac{15}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{11}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **17.** $\frac{1}{4}\sqrt{0{,}2}$; $\sqrt{0{,}2}$.

18. $10\sqrt{\frac{1}{5}}$; $3\sqrt{\frac{1}{5}}$; $100\sqrt{\frac{1}{5}}$; $21\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$.

19. $2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\frac{6}{7}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

20. $\frac{1}{2}\sqrt[5]{6}$; $2\sqrt[5]{6}$; $\frac{1}{4}\sqrt[5]{6}$; $\frac{1}{5}\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{6}$; $\frac{1}{3}\sqrt[5]{6}$.

21. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{3}\sqrt{5}$. **22.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$. **23.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

24. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{7}$; $\frac{1}{4}\sqrt[3]{7}$.

---

25. $a\sqrt[6]{ab}$; $a^2b\sqrt[6]{ab}$. **26.** $3m\sqrt[3]{m}$; $2m^2\sqrt[3]{m}$.

27. $0{,}3y\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$; $0{,}4\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$. **28.** $x\sqrt[3]{x(x-3)}$; $\frac{1}{x}\sqrt[3]{x(x-3)}$.

29. $\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{c}{b}}$; $\frac{ac}{x}\sqrt{\frac{c}{b}}$; $\frac{ax}{y}\sqrt{\frac{c}{b}}$. **30.** $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ax}{b}}$; $\frac{x^2}{b^2}\sqrt{\frac{ax}{b}}$; $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{ax}{b}}$.

31. $\frac{1}{a}\sqrt[4]{a}$; $\frac{b}{a}\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{a}$; $\frac{1}{cx^2}\sqrt[4]{a}$.

32. $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-1}$; $\frac{1}{a+1}\sqrt{a^2-1}$.

33. $\frac{1}{b}\sqrt{b(1-ab)}$; $\frac{d}{c}\sqrt{b(1-ab)}$.

34. $(a-b)^2\sqrt{\frac{1}{a-b}}$; $(a^2+b^2)\sqrt{\frac{1}{a-b}}$, ou:

$(a-b)\sqrt{a-b}$; $\frac{a^2+b^2}{-a\,b}\sqrt{a-b}$.

35. $(x-b^2)\sqrt[3]{\frac{1}{x-b^2}}$; $(y-z)\sqrt[3]{\frac{1}{x-b^2}}$; $y\sqrt[3]{5y^2}\sqrt[3]{\frac{1}{x-b^2}}$.

36. $\frac{m}{1-x}\sqrt{m}$; $\frac{2(1-x)}{cn}\sqrt{m}$.

37. $a\sqrt{a^2-3ax+1}$; $y\sqrt{a^2-3ax+1}$.

38. $(x-2)\sqrt{5x}$; $(y+3)\sqrt{5x}$.

39. $2y(a-b)\sqrt[3]{\frac{1}{a-b}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{a-b}}$.

40. $(x-a)\sqrt[3]{(x+a)^2}$; $(1-a)\sqrt[3]{(x+a)^2}$.

41. $-a(x-1)\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}$; $-m(x-1)\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}$;

$\frac{(x-1)^2}{d}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}$, ou:

$-a\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $-m\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $\frac{x-1}{d}\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

42. $(x^2-2a^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{x-a}}$; $y^2\sqrt{\frac{2}{x-a}}$.

43. $\frac{x}{4a}\sqrt{xy}$; $2m^3xy\sqrt{xy}$. **44.** $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$. **45.** $7\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$.

46. $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$. **47.** $(40)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{3}$; $5\sqrt[3]{3}$. **48.** $3\sqrt[5]{4}$; $2\sqrt[5]{4}$.

49. $6\sqrt{3}$; $\sqrt{0,7}\sqrt{3}$.

XXIII

5. Transformation des radicaux de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux simples.

1. $\sqrt{\frac{10+\sqrt{100-19}}{2}}+\sqrt{\frac{10-\sqrt{100-19}}{2}}=\sqrt{\frac{10+9}{2}}+\sqrt{\frac{10-9}{2}}=\sqrt{\frac{19}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2. $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$, ou: $\frac{1}{2}\sqrt{14}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 3. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{26}+\sqrt{2}\right)$.

4. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{22}+\sqrt{2}\right)$. 5. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$. 6. $\sqrt{2}+1$.

7. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. 8. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{30}+\sqrt{2}\right)$.

9. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{42}-\sqrt{2}\right)$. 10. $2\sqrt{2}-1$. 11. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}-\sqrt{6}\right)$.

12. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$. 13. $\sqrt{7}-1$. 14. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

15. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{46}-\sqrt{6}\right)$. 16. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{62}-3\sqrt{2}\right)$. 17. $7+3\sqrt{5}$.

18. $\sqrt{7}+\sqrt{3}$. 19. $\sqrt{11}+\sqrt{5}$. 20. $\sqrt{11}+\sqrt{7}$. 21. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

22. $\sqrt{10}+2\sqrt{2}$. 23. $\sqrt{3}+1$. 24. $7+3\sqrt{5}$. 25. $2-\sqrt{3}$.

26. $\sqrt{10}-\sqrt{3}$. 27. $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$. 28. $2-\sqrt{2}$. 29 $\sqrt{7}-2$.

30. $5\sqrt{6}-\sqrt{38}$. 31. $2\sqrt{67}-2\sqrt{51}$. 32. $5\sqrt{11}-4\sqrt{13}$.

33. $\sqrt{51}-7$. 34. $\sqrt{134}-\sqrt{22}$. 35. $4\sqrt{26}-\sqrt{102}$.

36. $2\sqrt{111}-2\sqrt{30}$. 37. $4\sqrt{33}-6\sqrt{5}$. 38. $\sqrt{759}-\sqrt{241}$.

---

39. $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{14}\sqrt{42}$. 40. $\frac{2}{11}\sqrt{22}+\frac{1}{11}\sqrt{11}$.

41. $\frac{1}{6}\sqrt{30} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$. **42.** $\frac{5}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{10}$.

43. $\frac{1}{13}\sqrt{78} - \frac{1}{13}\sqrt{13}$. **44.** $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{5}\sqrt{5}$.

45. $\frac{1}{11}\sqrt{110} - \frac{1}{22}\sqrt{22}$. **46.** $\frac{1}{14}\sqrt{42} - \frac{1}{7}\sqrt{7}$.

47. $2\sqrt{0{,}11} - \sqrt{0{,}1}$. **48.** $\frac{3}{2}\sqrt{0{,}14} + \frac{1}{2}\sqrt{0{,}26}$.

49. $2\sqrt{0{,}093} - \sqrt{0{,}159}$. **50.** $\sqrt{0{,}109} + \sqrt{0{,}042}$.

51. $2\sqrt{0{,}033} + 9\sqrt{0{,}001}$. **52.** $\sqrt{0{,}263} - 3\sqrt{0{,}006}$.

53. $\sqrt{\frac{\sqrt{80}+\sqrt{80-60}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{80}-\sqrt{80-60}}{2}} = \sqrt[4]{45} - \sqrt[4]{5}$.

54. $\sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{5}$. **55.** $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. **56.** $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

57. $\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. **58.** $\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

59. $\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. **60.** 2. **61.** $\frac{1}{2}\sqrt{46} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

---

62. $\frac{1}{2}\sqrt{10a} + \frac{1}{2}\sqrt{2a}$. **63.** $\frac{1}{2}\sqrt{6x^3} - \frac{1}{2}\sqrt{2x^3}$.

64. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. **65.** $\sqrt{x} + \sqrt{-y}$. **66.** $1 + \sqrt{a-1}$.

67. $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 6} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$. **68.** $\sqrt{1-b^2} - b$.

69. $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$. **70.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(2a^2 - b^2)} + \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

71. $\sqrt{2a+y^2} + \sqrt{2a-y^2}$. **72.** $\frac{1}{2}\sqrt{6(2y-z)} + \frac{1}{2}\sqrt{6z}$.

73. $\sqrt{r\left(r+\frac{a}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r-\frac{a}{2}\right)}$. **74.** $x + \sqrt{a^2 - x^2}$.

75. $\sqrt{a - b - 1} - 1$.

76. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(a^2 - b^2 + 2ab)} + \sqrt{2(a^2 - b^2 - 2ab)}\right)$.

77. $\frac{x + y}{2}\sqrt{2} - \frac{x - y}{2}\sqrt{2} = y\sqrt{2}$. 78. $(a + x) + \sqrt{a^2 - x^2}$.

79. $(3 - 2x) + 2\sqrt{(3 - x)x}$. 80. $1 - 3x + \sqrt{1 + 6x}$.

81. $\sqrt{\frac{(a + c)(b + c)}{2}} + \sqrt{\frac{(a - c)(b - c)}{2}}$.

82. $\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 + c}{2}} - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - c}{2}}$. 83. $(x - y) - 2\sqrt{xy}$.

84. $\sqrt{bc + a^2} - a$. 85. $b + \sqrt{bc - b^2}$.

86. $\sqrt{\frac{ab(2b - a)}{4(b - a)}} + \sqrt{\frac{-ab(2b + a)}{4(b + a)}}$.

87. $\frac{1}{\sqrt{4(b^2 - a^2)}}\left\{\sqrt{ab(ab + 2b^2 - a^2)} + \sqrt{ab(ab - 2b^2 + a^2)}\right\}$

ou : $\frac{1}{2(b^2 - a^2)}\left\{\sqrt{ab(a^4 - a^3b - 3a^2b^2 + ab^3 + 2b^4)} + \right.$

$\left.\sqrt{ab(-a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 - 2b^4)}\right\}$.

88. $\frac{4x^2 + y^3}{2}\sqrt{2} + \frac{4x^2 - y^3}{2}\sqrt{2} = 4x^2\sqrt{2}$.

XXIV

1. $2 + \sqrt{-1}$. 2. $2\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{-1}$. 3. $2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{-1}$.

4. $2\sqrt{13} + \sqrt{13}\sqrt{-1}$. 5. $2 + \sqrt{3}\sqrt{-1}$.

6. $\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{-1}$. 7. $\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2}$.

8. $2 + \sqrt{-2}$. 9. $\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-10}$.

10. $\frac{1}{2}\sqrt{30}+\frac{1}{2}\sqrt{-10}.$ **11.** $2\sqrt{2}-\sqrt{-1}.$

12. $\frac{1}{2}\sqrt{34}-\frac{1}{2}\sqrt{-2}.$ **13.** $\frac{3}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{-6}.$

14. $\sqrt{22}-\sqrt{-2}.$ **15.** $\sqrt{30}+\sqrt{-2}.$ **16.** $\frac{1}{2}\sqrt{22}-\frac{1}{2}\sqrt{-2}.$

17. $\frac{1}{2}\sqrt{1{,}86}-\frac{1}{2}\sqrt{-0{,}06}.$ **18.** $\sqrt{1{,}30}+\frac{1}{2}\sqrt{-2}.$

19. $\sqrt{1{,}07}+\sqrt{-1}.$ **20.** $1+\frac{1}{3}\sqrt{-3}.$

21. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{14a}-\sqrt{-2a}\right).$ **22.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(2a-b)}+\sqrt{-6b}\right).$

23. $\sqrt{2x}+\sqrt{x-y}.$ **24.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(3x^2-4)}-\sqrt{2(x^2-2)}\right).$

25. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(2x+1)}-\sqrt{-2}\right).$ **26.** $\sqrt{z^2+2}+\sqrt{-1}.$

27. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6m}+\sqrt{-2m}\right).$ **28.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{10p}+\sqrt{-2p}\right).$

29. $\frac{x}{2}\left(\sqrt{14}-\sqrt{-2}\right).$ **30.** $y^2(\sqrt{5}-\sqrt{-1}).$

31. $a^4(\sqrt{3}-\sqrt{-1}).$

---

32. $\sqrt{26}.$ **33.** $\sqrt{2}.$ **34.** $\sqrt{14}.$ **35.** $\sqrt{2}.$ **36.** $2.$

37. $2\sqrt{17}.$ **38.** $\sqrt{26}.$ **39.** $\sqrt{-2}.$ **40.** $2\sqrt{11}.$ **41.** $2\sqrt{x}.$

42. $2\sqrt{2a}.$ **43.** $2\sqrt{x^2+y^2}.$ **44.** $\sqrt{2(2a-1)}.$ **45.** $2x.$

46. $2\sqrt{a^2+4ax}.$

XXV

6. Transformation de la somme ou de la différence de deux radicaux simples en un radical unique.

1. $4\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{147}$. **3.** $8\sqrt{2}$. **4.** $10\sqrt{5}$. **5.** $3\sqrt{6}$. **6.** $4\sqrt{5}$.

7. $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$. **8.** $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. **9.** $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$.

10. $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$. **11.** $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$. **12.** $\sqrt{55 + 14\sqrt{6}}$.

13. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. **14.** $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$. **15.** $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

16. $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$. **17.** $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$. **18.** $\sqrt{26 - 2\sqrt{144}} = \sqrt{2}$.

19. $\sqrt{49 - 28\sqrt{3}}$. **20.** $\sqrt{20 - 10\sqrt{3}}$. **21.** $\sqrt{93 - 24\sqrt{15}}$.

22. $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$. **23.** $\frac{1}{4}\sqrt{17 - 4\sqrt{15}}$. **24.** $\frac{1}{6}\sqrt{95 - 24\sqrt{14}}$.

25. $\sqrt{10 + 2\sqrt{22}}$. **26.** $\sqrt{8 - 2\sqrt{11}}$. **27.** $\sqrt{12 + 2 \times 5} = \sqrt{22}$.

---

28. $\sqrt{-13 + 8\sqrt{-3}}$. **29.** $\sqrt{1 - 4\sqrt{-5}}$.

30. $\sqrt{2 + 2\sqrt{-35}}$. **31.** $\sqrt{5 - 2\sqrt{-66}}$.

32. $\frac{1}{6}\sqrt{-31 - 12\sqrt{-.56}}$. **33.** $\sqrt{-12 + \frac{45}{2}\sqrt{-1}}$.

34. $\sqrt{1,46 - 0,2\sqrt{-6}}$. **35.** $\frac{1}{3}\sqrt{6 - 12\sqrt{-6}}$.

36. $\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$. **37.** $\sqrt{-2}$. **38.** $\sqrt{16 + 2\sqrt{89}}$.

---

39. $\sqrt{a^3 + b^3 + 2ab\sqrt{ab}}$. **40.** $\frac{1}{6}\sqrt{9a + 4b + 12\sqrt{ab}}$.

41. $\sqrt{ab(a - b)^2} = (a - b)\sqrt{ab}$.

42. $\sqrt{2(x^2+x)+2\sqrt{(x^2-x)^2+4}}.$

43. $\sqrt{2}.$ **44.** $\sqrt{6}.$ **45.** $\sqrt{6(2a^2+1)}.$

II. OPÉRATIONS SUR LES RADICAUX

XXVI

1. Addition et soustraction de radicaux.

1. $5\sqrt{3}.$ **2.** $10\sqrt{7}.$ **3.** $13\sqrt{10}.$ **4.** $4\sqrt{2}.$ **5.** $2\sqrt{11}.$

6. $6\sqrt{3}.$ **7.** $3\sqrt[3]{3}.$ **8.** $7\sqrt{13}.$ **9.** $4\sqrt{2}.$ **10.** $6\sqrt[3]{4}.$

11. $3\sqrt{2}.$ **12.** $5\sqrt[5]{2}.$ **13.** $\frac{7}{2}\sqrt[3]{5}.$ **14.** $-4\sqrt[4]{3}.$ **15.** $11\sqrt{7}.$

16. $-\sqrt{2}.$ **17.** $12\sqrt{3}.$ **18.** $129\sqrt{5}.$ **19.** $19\sqrt{5}-23\sqrt{3}.$

20. $35\sqrt{6}.$ **21.** $6\sqrt{5}.$ **22.** $4\sqrt{13}-3\sqrt{11}.$ **23.** $-\frac{43}{12}\sqrt{2}-1\frac{2}{3}\sqrt{5}$

24. $4\sqrt[3]{5}-11\frac{5}{6}\sqrt[3]{4}.$ **25.** $\frac{73}{18}+\frac{31}{15}\sqrt{5}.$ **26.** $\frac{19}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}.$

27. $2\sqrt{15}.$ **28.** $6\sqrt{6}-2\sqrt{11}.$ **29.** $4\frac{4}{15}\sqrt{6}-\sqrt[3]{14}.$

30. $11\frac{227}{240}\sqrt[4]{4}-\frac{49}{120}\sqrt{20}.$ **31.** $\frac{9}{4}\sqrt{6}-\frac{8}{3}\sqrt[3]{6}.$ **32.** $2\sqrt{2}+2{,}76\sqrt[3]{2}.$

33. $8\sqrt[6]{3}+\frac{37}{2}\sqrt[4]{5}.$ **34.** $\frac{7}{10}-42\frac{1}{3}\sqrt[4]{7}.$ **35.** $3\sqrt{10}.$ **36.** 0.

37. 0. **38.** 3. **39.** $-3\sqrt[5]{3}.$ **40.** $6\sqrt[4]{3}-8\sqrt[4]{2}.$

41. $7\sqrt[6]{21}.$ **42.** $1\frac{1}{3}\sqrt[4]{5}.$ **43.** $\sqrt[4]{2}+2\sqrt[8]{8}.$ **44.** 6.

---

45. $2\sqrt{a}.$ **46.** $-7\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2}.$ **47.** $(a+b-3)\sqrt{a}.$ **48.** $5\sqrt{b}.$

49. $(c+5)\sqrt[3]{c}.$ **50.** $(a-b+2)\sqrt[5]{b}.$ **51.** $(a-b)^2\sqrt{x}.$

52. $(x+y)^2\sqrt{z}.$ **53.** $2a(b-1)\sqrt{c}.$ **54.** $(7a-2)\sqrt[4]{a}.$

55. $(3m+1)\sqrt[3]{m}.$ **56.** $-(7+5a)\sqrt{2a}.$ **57.** $10ab\sqrt{7ab}.$

58. $4mn\sqrt{5m}.$ **59.** $(2ab-6)^2\sqrt{2b}.$ **60.** $2a^2(2+5b)\sqrt[3]{b}.$

61. $\frac{9}{2b}\sqrt{a}.$ **62.** $3a^2c\sqrt{3d}.$ **63.** $-mn^2\sqrt[3]{5y}.$ **64.** $3{,}35\sqrt{6z}.$

65. $7mx^2$. **66.** $(6a - 2b)\sqrt{x} + (7c - 3b)\sqrt[3]{a}$.

67. $-0{,}85\sqrt[3]{m}$. **68.** $3(n - m)\sqrt[5]{a} - (5n - 1)\sqrt[3]{h}$.

69. $(3x + 2y - x^2 - y^2)\sqrt{x - y}$. **70.** $(5a - 2b^3 + 3)\sqrt{1 - m}$.

XXVII

2. Multiplication de radicaux.

1. 9. **2.** 10. **3.** 6. **4.** 3. **5.** 4. **6.** 8. **7.** 3.
8. 6. **9.** 2. **10.** 3. **11.** 8. **12.** -7. **13.** 11.
14. -2. **15.** 27. **16.** 72. **17.** 25. **18.** 729. **19.** 60.
20. 14. **21.** $3\sqrt{2}$. **22.** $3\sqrt[3]{2}$. **23.** $2\sqrt[4]{3}$. **24.** $3\sqrt[5]{2}$.
25. $-9\sqrt[3]{5}$. **26.** 8. **27.** 60. **28.** $\frac{3}{4}$. **29.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.
30. 24. **31.** 10. **32.** 4. **33.** $-237\frac{3}{4}$. **34.** $-5\sqrt[3]{6}$.
35. $\sqrt{21}$. **36.** $\sqrt{7}$. **37.** 8. **38.** 5. **39.** 7.
40. 4. **41.** 4. **42.** 5. **43.** $\sqrt{5} - 4$.
44. $2(5 - \sqrt{2})$. **45.** $-(15 + 19\sqrt{3})$. **46** $3(12 - 5\sqrt{6})$.
47. $6\sqrt{2} - 3\sqrt{15} + 8\sqrt{3} - 6\sqrt{10}$. **48.** $\sqrt{14} - \sqrt{6} + \sqrt{35} - \sqrt{15}$.
49. $8 - 8\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}$. **50.** 30.
51. $54 - 7\sqrt{35} - 26\sqrt{21} - 7\sqrt{15}$. **52.** $171 - 36\sqrt{6}$.
53. $86 + 23\frac{1}{2}\sqrt{6}$. **54.** $140 + 10\sqrt{6}$.
55. $\sqrt[3]{12} - 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{4} - 1$.
56. $156 - 24\sqrt[3]{4}$. **57.** $340 + 51\sqrt[3]{18}$.
58. $4 - \frac{85}{2}\sqrt[3]{3} + 25\sqrt[3]{9}$. **59.** $-\sqrt{2}$. **60.** $176 + 66\sqrt{5}$.
61 $110 + 24\sqrt{10} - 12\sqrt{6} - 16\sqrt{15}$. **62.** $33 - 18\sqrt{2}$.
63. 125. **64.** 243. **65.** 5887. **66.** $75\frac{3}{8} + 7\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

---

67. $\sqrt{ab}$. **68.** $6\sqrt{ax}$. **69.** $6a$. **70.** $5x\sqrt{2}$. **71.** abx.

72. $12mny^2$. **73.** $4bx\sqrt{3}$. **74.** $2a^2m$. **75.** $3b^4$. **76.** $4ax$.

77. $9my^2$. **78.** $5mx^2\sqrt{3}$. **79.** $u^2\sqrt{3}$. **80.** $3a$.

81. $30x^3\sqrt[3]{3}$. **82.** $8y\sqrt[3]{y}$. **83.** $24a^3$. **84.** $210b^2$. **85.** $\sqrt{a}$.

86. $\sqrt{ab}$. **87.** $\frac{4b}{a}$. **88.** $\frac{12b}{a}$. **89.** $\frac{3}{4x}\sqrt{y}$. **90.** $\frac{5a^2}{b}$.

91. $\frac{2a}{m^2}\sqrt[3]{m}$. **92.** $\frac{2x^3}{y^2}$. **93.** $\sqrt{a^4 - b}$. **94.** $\sqrt{m^2 - n^3}$.

95. $a\sqrt{4 - 5a}$. **96.** $a^2 - b$. **97.** $u - v^2$. **98.** $x - y$.

99. $9m - 4n$. **100.** $am^2 - bn^2$. **101.** $mn(m - n)$.

102. b. **103.** d. **104.** y. **105.** $9d - 4(a + 1)$.

106. $a^2u^3 - b^2(x - 1)$. **107.** $\frac{1}{a^2}(1 - x - a^2x)$. **108.** $2y$.

109. $-z$. **110.** $(18a - 1) + 6\sqrt{a(9a - 1)}$. **111.** $2b$.

112. $6b$. **113.** $-3u$. **114.** $a + m$. **115.** $2z$.

116. $2(b - c)$. **117.** $2m + y - 3(2 + a - z)$.

118. $b^2 - a^2 + 2bc$. **119.** 1. **120.** 6. **121.** n^2.

122. $a - 1$. **123.** $2x + 1$. **124.** $5y^3 - 3$. **125.** $1 + 6y^4$.

126. $\frac{1}{by}\sqrt{b^2 - a^2y^2}$. **127.** $\frac{1}{nq}\sqrt{m^2q^2 - n^2p^2}$.

128. $\frac{1}{12}\sqrt{64a^2 - 81b^2}$. **129.** $\frac{1}{4x}\sqrt{256 - x^4}$. **130.** $\frac{3a^2(a + 2)}{2b^4(a - 1)}$.

131. $\frac{4n^2(2x + 1)}{5m(3 - a)}$. **132.** $\frac{2m + n}{2a - 5}\sqrt{(m - b)(x - y)}$.

133. a. **134.** x^2. **135.** $2a^6 - 2a^5b^2\sqrt{ab} + 6a^6\sqrt{c}$.

136. $3b^3(b^2 - 6b^5 - 2)$. **137.** $5a^2c^3\sqrt[3]{15} - 3a^3c^3\sqrt[3]{5c} + 5a^4c^2\sqrt[3]{3c}$.

138. $3x^3 - 2x^4\sqrt[3]{9} + 7{,}5x^7\sqrt[3]{6x^2}$. **139.** $2y^3z^2 + \frac{2z^3}{3} - 10z^5$.

140. $20bu^3x + \frac{3au}{2} - 10xu^{-1}\sqrt[5]{2}$.

141. $\frac{3x^4}{a} + 4x^3 - 10ax^2 + 4a^2x.$

142. $15x^2y^{-1}z^4 - 10x^3z^3 + \frac{7yz^2}{4} - 30xy^{-2}z^2 - \frac{7xy^2z}{6} - \frac{7}{2x}.$

143. $2bc\sqrt{bc} - 2abc^2\sqrt[4]{b^3} - 2a^2b^2c^2\sqrt{c} + 4a^2b^2c^2\sqrt[4]{bc^2}$
$+ 4a^3b^2c^3\sqrt{b} - 4ab^2c^2.$

144. $9x^5 - 12x^4 + 4x^3.$ **145.** $a^2y + 2aby^2 + b^2y^3.$

146. $ab^3m^4 - 2a^2b^2m^3 + a^3bm^2.$

147. $48p^2z^5 - 12pqz^3\sqrt{6} + \frac{9}{2}q^2z.$

148. $\frac{9}{a^4} + 2a^5 + 3a + 6\sqrt{2a} - \frac{6}{a^2}\sqrt{3a} - 2a^3\sqrt{6}.$

149. $a - 2a^4 + 2a^6 + a^7 - 2a^9 + a^{11}.$

150. $ax^2\sqrt[3]{a} - 2a^2x^3 + a^2x^4\sqrt[3]{a^2} + 2a^2x^4\sqrt[3]{a} - 2a^3x^5 + a^3x^6\sqrt[3]{a}.$

---

151. $\sqrt[6]{2000}.$ **152.** $5\sqrt{30}.$ **153.** $2\sqrt{10}.$ **154** 6. **155.** 4.

156. $2\sqrt[3]{25}.$ **157.** 2. **158.** 15. **159.** $\sqrt[10]{13824}.$

160. $6\sqrt[3]{9}.$ **161.** $\sqrt[20]{81 \times 42^5}.$ **162.** $\sqrt[15]{2^8}.$ **163.** $7\sqrt[14]{7^3 \times 8^7}.$

164. $6\sqrt[30]{6 \times 7^{21}}.$ **165.** $\sqrt[15]{\frac{1}{144}}.$ **166.** $\sqrt[20]{\frac{5^4 \times 7}{3^6}}.$

167. $\sqrt[20]{\frac{9}{2^{15}}} = \frac{\sqrt[10]{3}}{\sqrt[4]{8}}.$ **168.** $\sqrt[36]{\frac{2}{3 \times 7^4}}.$ **169.** $\sqrt[30]{\frac{256}{5}}.$

170. $\sqrt[20]{0,00002}.$ **171.** $\sqrt[12]{0,24^3 \times 0,8}.$ **172.** $\sqrt[14]{7\,200\,000}.$

173. $4\sqrt[4]{27} + 3\sqrt[12]{2^6 \times 3^7 \times 5^4} - \sqrt[20]{2^{14} \times 3^5 \times 5^4}.$

174. $3\sqrt[4]{200} - 2\sqrt[12]{2048} + \sqrt[12]{5000}.$

175. $2\sqrt[28]{10^{11}} + 3\sqrt[4]{40} - 4\sqrt[12]{625000}.$

176. $3\sqrt[15]{2^{13} \times 3^3} - 2\sqrt[6]{3^3 \times 2^4} + 12\sqrt[10]{2^2 \times 3^7} - 24.$

177. $5\sqrt[12]{2^2 \times 3^5 \times 5^3} + 2\sqrt[6]{2 \times 3^5} + 20\sqrt[12]{2^2 \times 3^3 \times 5^5}$
$+ 8\sqrt[6]{2 \times 3^4 \times 5}.$

178. $4\sqrt[3]{15^2} + 9\sqrt{10} + 12\sqrt[12]{2^3 \times 3^4 \times 5^7}$.

179. $25\sqrt[5]{20^2} + 16\sqrt[3]{30^2} - 40\sqrt[15]{2^{11} \times 3^5 \times 5^8}$.

180. $5 + 4\sqrt[3]{225} + \sqrt[5]{81} - 4\sqrt[6]{3^2 \times 5^5} + 2\sqrt[10]{5^5 \times 3^4}$
$- 4\sqrt[15]{3^{11} \times 5^5}$.

181. $a\sqrt[6]{a^5}$. **182.** $ab\sqrt[4]{b^3}$. **183.** $x\sqrt[10]{c^9x^7}$. **184.** $\sqrt[14]{2^{11}c^2x^{13}}$.

185. $bc\sqrt[12]{b^5c^{11}}$. **186.** $x^2y\sqrt[15]{x^2y^7}$. **187.** $2a^2\sqrt{2a^2}$.

188. $3m\sqrt[6]{4m}$. **189.** $15x\sqrt[4]{8}$. **190.** $\sqrt[4]{(x^4 - y^4)(x^2 - y^2)}$.

191. $\sqrt[6]{(x^4 - 1)^2(x^2 + 1)}$. **192.** $\sqrt[20]{a^2b}$. **193.** $n\sqrt[30]{\frac{np^{13}}{m^{19}}}$.

194. $\sqrt[12]{\frac{b^4c^2x}{a}}$. **195.** $\sqrt[30]{\frac{a^{11}b^{12}}{m^3x^{14}}}$.

196. $axz\sqrt{az} - a^2\sqrt[6]{ax^5z^3} + az\sqrt[4]{a^2x^2z}$.

197. $a^3x\sqrt[4]{ax^3} + a^2x^2\sqrt[10]{ax} - a^2\sqrt[6]{x^5}$.

198. $a^4m^2\sqrt{a} - a^4m^3\sqrt[3]{a} + a^3m^4\sqrt{a}$. **199.** $a^2b\sqrt[6]{b} + 2a^2b - a^3b$.

200. $\sqrt[10]{x^9} - x^2\sqrt{x} + \sqrt[14]{x^{13}}$. **201.** $a\sqrt[3]{a^2}$.

202. $5x^3 + 5\sqrt[3]{5x^2} + x\sqrt[3]{x^2} + 10x\sqrt[6]{5x^5} - 2x^2\sqrt[6]{125x^2}$
$- 2x\sqrt[6]{625x}$.

203. $z\sqrt[5]{z} + \sqrt[3]{z^2} + z^5 - 2\sqrt[15]{z^{14}} + 2z^3\sqrt[10]{z} - 2z^2\sqrt[6]{z^5}$.

204. $a^2b^3 + ab^2 - 2ab^2\sqrt{ab} + 4b^2\sqrt[3]{a^2b^2} - 4ab^2\sqrt[6]{a^2b^5}$
$+ 4b^2\sqrt[6]{a^5b^2}$.

XXVIII

3. Division de radicaux.

1. 2. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 4. **6.** 9. **7.** 3.

8. 2. **9.** 5. **10.** 6. **11.** 2. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 5.

15. 4. **16.** $\frac{3}{2}$. **17.** $\frac{5}{6}\sqrt{2}$. **18.** $\frac{7}{6}$. **19.** $\frac{2}{3}$. **20.** $\frac{3}{7}$. **21.** $1\frac{1}{6}$.

22. $1\frac{2}{9}$. **23.** $1\frac{9}{17}$. **24.** $\sqrt{2}+5\sqrt{6}$. **25.** $7\sqrt{3}-3\sqrt{5}$.

26. $4\sqrt{35}+8\sqrt{14}$. **27.** $5\sqrt{7}-4\sqrt{6}+2\sqrt{5}$.

28. $2\sqrt{42}-3\sqrt{14}+5\sqrt{10}$. **29.** $2\sqrt[3]{25}-6\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{36}$.

30. $5\sqrt[3]{75}+3\sqrt[3]{18}-4\sqrt[3]{36}$. **31.** $3-2\sqrt{2}$.

---

32. $\sqrt{3}$. **33.** $\sqrt{x}$. **34.** $\sqrt{2}$. **35.** $\sqrt{2m}$. **36.** $\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **37.** a.

38. $a^2\sqrt{3}$. **39.** $2c^2$. **40.** $\frac{a}{b}$. **41.** $\frac{1}{2a}\sqrt{2}$. **42.** $3a^2$.

43. $2n\sqrt[3]{2}$. **44.** $7x\sqrt[3]{x^2}$. **45.** $2y$. **46.** $\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{ax^2}$. **47.** $5a\sqrt[4]{a}$.

48. $\frac{3}{2y}$. **49.** $\frac{3a}{2y^2}\sqrt[4]{12y^2}$. **50.** $\frac{2}{5}\sqrt{5m}$. **51.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

52. $1+\sqrt{a}$. **53.** $\sqrt{b}+1$. **54.** $x-y$. **55.** $ax\sqrt{x}-b\sqrt{y}$.

56. $cy\sqrt[3]{y^2}-d\sqrt[3]{z}$. **57.** $ax\sqrt{x}-b^2x^2\sqrt{x}+cx^3\sqrt{x}$.

58. $c\sqrt[3]{y}-e\sqrt[3]{y}-d\sqrt[3]{y^2}$. **59.** $p\sqrt{x}+qx\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}$.

60. $m\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}+an\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}-\frac{a^2p}{b}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

61. $0{,}2\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}+0{,}3\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}-0{,}4\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}}$. **62.** $\frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{xu}{yz}}-\sqrt{\frac{du}{z}}$.

---

63. 3. **64.** $\sqrt[6]{3}$. **65.** $\sqrt[6]{7}$. **66.** $\sqrt[6]{24}$. **67.** $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$. **68.** 0,6.

69. 0,2. **70.** 0,3. **71.** $\frac{2}{15}\sqrt{10}$. **72.** $\frac{1}{5}\sqrt{10}$. **73.** $\frac{1}{2}\sqrt[5]{16}$.

74. $\sqrt{3}$. **75.** 7. **76.** $\sqrt{5}$. **77.** $2\sqrt{3}$. **78.** $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

79. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **80.** $\frac{1}{3}\sqrt{7}$. **81.** $\frac{1}{7}\sqrt{210}$. **82.** $9\sqrt{3}+15$.

83. $6\sqrt{2}+8$. **84.** $\frac{1}{a}\sqrt[6]{a^5}$. **85.** $\sqrt[15]{b}$. **86.** $\frac{1}{m}\sqrt[12]{m^{11}}$. **87.** $\sqrt[18]{x^{11}}$.

88. $\frac{1}{x}\sqrt[6]{\frac{4}{x}} = \frac{1}{x^2}\sqrt[6]{4x^5}$. **89.** $\sqrt[35]{\frac{y^{13}}{32}}$. **90.** $\frac{1}{6z}\sqrt{2}$. **91.** $\frac{1}{a}\sqrt[77]{a^{68}b^{30}}$.

92. $\sqrt[42]{\frac{a^5}{c^{10}}}$. **93.** $a\sqrt{a}$. **94.** $b^2\sqrt{b}$. **95.** $z^4\sqrt{z}$.

96. $\frac{y^3}{2}\sqrt{6y}$. **97.** $\frac{1}{5x^2}\sqrt[3]{25mx}$. **98.** $\frac{1}{2x^2y^3}\sqrt[4]{8x^3y^2}$.

99. $\frac{2a}{5x}\sqrt[3]{\frac{5a^2}{x}}$. **100.** $3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. **101.** $\frac{1}{2}\sqrt[4]{m^3} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{mn^2}$.

---

102. $\frac{1}{5}$. **103.** 4. **104.** $\frac{5}{2}$. **105.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **106.** 17.

107. $\frac{1}{6}$. **108.** 4. **109.** $\frac{1}{3}$. **110.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **111.** $\frac{1}{m^2}$.

112. $\frac{n^3}{m^2\sqrt[3]{m}}$. **113.** $\frac{1}{a}$. **114.** $\frac{b^2\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}$. **115.** a. **116.** $m\sqrt[15]{m}$.

117. $\frac{1}{x^5\sqrt[6]{x}}$. **118.** $\sqrt[10]{\frac{1}{a^{11}}}$. **119.** a^4. **120.** $\sqrt[3]{\frac{1}{m^7}}$. **121.** $\sqrt[6]{a^5}$.

122. $x^2\sqrt[10]{x^7}$. **123.** $\frac{1}{\sqrt[15]{a}}$. **124.** $4\sqrt[3]{4}$. **125.** $24\sqrt{3}$. **126.** $\sqrt[3]{9}$.

127. $\sqrt[m]{a^{2n}}$. **128.** $\sqrt[2p]{a^n}$. **129.** $\sqrt[\frac{2}{3}]{75^{-1}} = \frac{1}{1125}\sqrt{3}$. **130.** $\frac{6}{25}\sqrt[3]{150}$.

131. $\sqrt[m]{x^n}$. **132.** 25. **133.** $25\sqrt[4]{5}$. **134.** $\sqrt[ps]{m^{qr}}$.

XXIX

4. Elévation de radicaux à une puissance.

1. a^3. **2.** m^2. **3.** n^3. **4.** x^3. **5.** y^2. **6.** ab^2.

7. $\sqrt{m^{15}}$. **8.** $n^2\sqrt[3]{n^2}$. **9.** $y\sqrt[4]{y}$. **10.** $b^2c\sqrt[3]{b^2c}$.

11. $xz^2\sqrt[8]{x^6z^5}$. **12.** $a^2\sqrt[3]{4a^2}$. **13.** $1\frac{1}{5}$. **14.** $3a^2$. **15.** a^2c.

16. $2a^4\sqrt[4]{a}$. **17.** a^2x^8. **18.** $(x+y)^6$. **19.** $(x-y)\sqrt[5]{(x-y)^3}$.

20. $(a^2 - b^2)^2$. **21.** $\sqrt[4]{(1 + a^2)^9}$. **22.** $(x^2 - y^2)^{2n}$.

23. $\sqrt[3]{a^4b^2} + m^3 + \sqrt{ax^3} - 2\sqrt[6]{a^4b^2m^9} + 2\sqrt[12]{a^{11}b^4x^9} - 2\sqrt[4]{m^6ax^3}$.

24. $\sqrt[x]{a^4} + \sqrt[y]{b^2} - 2\sqrt[xy]{a^{2y}b^x}$.

25. $\sqrt[x]{m^2} + \sqrt[y]{n^2} + \sqrt[z]{p^4} - 2\sqrt[xy]{m^yn^x} + 2\sqrt[xz]{m^zp^{2x}} - 2\sqrt[yz]{n^zp^{2y}}$.

26. $2a^3b$. **27.** $- xy^2$. **28.** $(x^2 - y^2)^2$. **29.** $- (a^2 - b^2)^3$.

30. 5. **31.** 16. **32.** 127. **33.** $- 131$.

34. $9\sqrt[3]{9}$. **35.** $- 4\sqrt[4]{2}$. **36.** $- 13^2 = 169$. **37.** 6. **38.** $\sqrt{n}$.

39. $v^2 = \sqrt[1]{v^2}$. **40.** $(x^4)^3 = \sqrt[\frac{1}{3}]{x^4} = x^{12}$. **41.** $\sqrt[1]{x^3}$. **42.** $\sqrt[\frac{1}{4}]{y^5} = y^{20}$.

XXX

5. Extraction de la racine d'un radical.

1. $\sqrt[3]{a}$. **2.** $\sqrt[6]{b}$. **3.** $\sqrt[12]{c}$. **4.** $\sqrt[30]{2m}$. **5.** $\sqrt[8]{3a^2}$.

6. $\sqrt[3]{a}$. **7.** $\sqrt{m}$. **8.** $\sqrt[3]{y}$. **9.** $\sqrt[3]{a^2}$. **10.** $\sqrt[12]{m^5}$.

11. $\sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$. **12.** $\sqrt{3}$. **13.** $x - y$. **14.** $(a - b)^2$.

15. $(m + n)^2$. **16.** $\sqrt[3]{(3a - 2b)^2}$. **17.** $(1 - x^2)^6$.

18. $\sqrt[3]{2x^2}$. **19.** $a^3\sqrt[3]{2}$. **20.** $m\sqrt[3]{n^2}$. **21.** $m\sqrt[13]{6}$.

22. $2a^2\sqrt[7]{3}$. **23.** $\sqrt{3a^3} = a\sqrt{3a}$. **24.** $\sqrt[xy]{m^3}$. **25.** $\sqrt[yz]{a^{12}}$.

26. $\sqrt[4]{a^3}$. **27.** $\sqrt{b}$. **28.** $\sqrt[4]{c}$. **29.** $\sqrt[6]{p^5}$.

30. $\sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$. **31.** $\sqrt[5]{b^4}$. **32.** $\sqrt[16]{d^5}$. **33.** $\sqrt[4]{y^3}$.

34. $\sqrt[3]{a}$. **35.** $\sqrt[5]{x}$. **36.** $\sqrt[8]{x^7}$. **37.** $\sqrt[27]{y^{13}}$.

38. $\sqrt[12]{z^{23}}$. **39.** $\sqrt[24]{a^{17}}$. **40.** $\sqrt[9]{m^3np^2}$.

41. $\sqrt{m + \sqrt[3]{m^2}}$, ou $m^{\frac{1}{3}}\sqrt{m^{\frac{1}{3}} + 1}$. **42.** $\sqrt[6]{a^5b^5}$. **43.** $\sqrt[30]{a^{29}b^{27}}$.

44. $\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^3}}$, ou $x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} + 1}$. **45.** $xy^2\sqrt[4]{x}$. **46.** $\sqrt[12]{m^7n^9}$.

47. $\sqrt[3]{5}$. **48.** $\sqrt{7}$. **49.** $\sqrt{6}$. **50.** 2. **51.** $\sqrt[3]{3}$.

52. 4 et 2. **53.** 9 et 3. **54.** 1296 et 6.

XXXI

6. Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction.

1. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **2.** $3\sqrt{2}$. **3.** $\sqrt{5}$. **4.** $3\sqrt{6}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **8.** $\sqrt{7}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** $2\sqrt{6}$.

11. $6\sqrt{2}$. **12.** $\frac{4\sqrt{7}}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **14.** $\frac{7\sqrt{11}}{22}$. **15.** $\sqrt[3]{2}$.

16. $\sqrt[3]{9}$. **17.** $\frac{5\sqrt[3]{49}}{7}$. **18.** $\frac{2\sqrt[3]{36}}{3}$. **19.** $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$. **20.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

21. $2\sqrt[3]{25}$. **22.** $2\sqrt[4]{8}$. **23.** $\frac{5\sqrt[4]{216}}{6}$. **24.** $\frac{4\sqrt[4]{108}}{3}$. **25.** $\frac{2\sqrt[4]{15^3}}{3}$.

26. $\frac{23\sqrt[4]{27}}{3}$. **27.** $5\sqrt[4]{27}$. **28.** $\frac{17\sqrt[4]{125}}{5}$. **29.** $\sqrt[6]{108}$.

30. $\frac{\sqrt[12]{5^4 \times 2^9}}{2}$. **31.** $\frac{5}{3}\sqrt[10]{3^5.8^2}$. **32.** $\frac{7\sqrt[4]{5400}}{6}$. **33.** $\frac{3\sqrt[3]{9}}{2}$.

34. $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$. **35.** $\sqrt[10]{9 \times 512}$. **36.** $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. **37.** $11(\sqrt{8} + \sqrt{7})$.

38. $\frac{6(\sqrt{12} - \sqrt{5})}{7}$. **39.** $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. **40.** $\frac{3}{4}(\sqrt{10} + \sqrt{6})$.

41. $\frac{2}{7}(3 - \sqrt{2})$. **42.** $-\frac{7}{4}(1 + \sqrt{5})$. **43.** $1 + \frac{1}{5}\sqrt{10}$.

44. $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$. **45.** $6(3\sqrt{2} - 4)$. **46.** $\frac{13(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$.

47. $-\frac{14(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{3}$. **48.** $-9(\sqrt{7} + \sqrt{9})$. **49.** $5(\sqrt{9} + \sqrt{5})$.

50. $\frac{8(6 + \sqrt{21})}{5}$. **51.** $\frac{2(3 + \sqrt{6})}{3}$. **52.** $\frac{21(4 + \sqrt{6})}{10}$.

53. $4(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})$. **54.** $\frac{3(8\sqrt{7} - 7\sqrt{2})}{2}$. **55.** $40(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

56. $4 - \sqrt{15}$. **57.** $\frac{8 + \sqrt{55}}{3}$. **58.** $\frac{23 - 2\sqrt{130}}{3}$.

59. $\frac{11 + 3\sqrt{14}}{5}$. **60.** $4 + \sqrt{15}$.

61. $-\frac{12 + 9\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 15\sqrt{6}}{2}$.

62. $\frac{3 - \sqrt{3} - 12\sqrt{5} + 4\sqrt{15}}{12}$.

63. $\frac{7(4\sqrt{5} - 5) + 15(\sqrt{10} - 4\sqrt{2})}{55}$.

64. $\frac{5(2\sqrt{3} + \sqrt{6}) - 6(1 + \sqrt{2})}{57}$.

65. $-\frac{7(2 + \sqrt{11}) + 3(2\sqrt{7} + \sqrt{77})}{42}$.

66. $\frac{15(4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{15})}{11}$.

67. $3(3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 6)$.

68. $\frac{7(2\sqrt{21} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{3} - 3)}{5}$.

69. $\frac{18(120\sqrt{6} + 205\sqrt{3} - 219\sqrt{2} - 308)}{529}$.

70. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. **71.** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. **72.** $2\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10} - 2$.

73. $\frac{195 - 75\sqrt{3} - 187\sqrt{2} + 137\sqrt{6}}{94}$.

74. $\frac{1}{2}(19\sqrt{2} + 16\sqrt{3} - 10\sqrt{5} - 10\sqrt{6} + 8\sqrt{10} + 8\sqrt{15} - 5\sqrt{30}$
$- 22$.

75. $\dfrac{\left.\begin{matrix}307\sqrt{2} - 152\sqrt{3} + 496\sqrt{5} - 290\sqrt{6} - \\ 281\sqrt{10} + 367\sqrt{15} + 257\sqrt{30} + 1376\end{matrix}\right\}}{2591}$.

76. $\dfrac{1523 + 1252\sqrt{2} + 898\sqrt{3} - 374\sqrt{5} + 739\sqrt{6} - 380\sqrt{10} - 215\sqrt{15} - 90\sqrt{30}}{1201}$.

---

77. $\sqrt{a}$. 78. $b\sqrt{b}$. 79. $\dfrac{\sqrt{d^5}}{d^2} = \sqrt{d}$. 80. $\dfrac{\sqrt{m^3}}{m^3}$.

81. $\dfrac{\sqrt{6x}}{2x}$. 82. $\sqrt[3]{m}$. 83. $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$. 84. $\sqrt[m]{c}$.

85. $\sqrt[p]{x^{p-1}}$. 86. $a^2\sqrt[5]{a^3}$. 87. $b^6\sqrt{b}$. 88. $\dfrac{m^3\sqrt{m}}{n}$.

89. $\dfrac{\sqrt{c}}{dc}$. 90. $d\sqrt[3]{d^2}$. 91. $\sqrt{m+n}$. 92. $(x+1)\sqrt{x-1}$.

93. $(a-b)\sqrt{a+b}$. 94. $\dfrac{(b+c)\sqrt{b-c}}{b-c}$.

95. $\dfrac{(x-y)\sqrt{x+y}}{x+y}$. 96. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$. 97. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$.

98. $\dfrac{(m+n)\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$. 99. $\dfrac{a+2\sqrt{a}}{a-4}$. 100. $\dfrac{b(1+\sqrt{b})}{1-b}$.

101. $\dfrac{(b+1)(b+\sqrt{b})}{b^2-b}$. 102. $\dfrac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$. 103. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

104. $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$. 105. $\dfrac{m+2-2\sqrt{2m}}{m-2}$.

106. $\dfrac{z^3+4-4\sqrt{z^3}}{z^3-4}$. 107. $\dfrac{1+a^5+2\sqrt{a^5}}{1-a^5}$.

108. $\dfrac{9+4a^3+12\sqrt{a^3}}{4a^3-9}$. 109. $\dfrac{12-6d^7-\sqrt{d^7}}{16-9d^7}$.

110. $\dfrac{ad+bcy+(ac+bd)\sqrt{y}}{d^2-c^2y}$. 111. $\dfrac{2(6+4z+11\sqrt{z})}{9-16z}$.

112. $\dfrac{acu+bdv+(ad+bc)\sqrt{uv}}{c^2u-d^2v}$.

113. $\dfrac{c\sqrt{ax}+d\sqrt{ay}-c\sqrt{bx}-d\sqrt{by}}{c^2x-d^2y}$.

114. $\dfrac{\sqrt{a^2+b}-\sqrt{a^2-b}}{b}$. 115. $\sqrt{a+m}-\sqrt{a-m}$.

116. $\dfrac{x\sqrt{1-a^2}+y\sqrt{1+a^2}}{x^2(1-a^2)-y^2(1+a^2)}$.

117. $\dfrac{5(a\sqrt{x^2-1}+b\sqrt{x^2+1})}{a^2(x^2-1)-b^2(x^2+1)}$. 118. $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

119. $\dfrac{a^2(x-y)+b^2(x+y)-2ab\sqrt{x^2-y^2}}{a^2(x-y)-b^2(x+y)}$.

120. $\dfrac{\sqrt{a^4-b^4}-a^2}{b^2}$. 121. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^6}}{x^3}$.

122. $-\dfrac{(m+n)(1+\sqrt{1-y^4})-(m-n)y^2}{2y^2}$, ou :

$$\frac{m(y^2-1)-(m+n)\sqrt{1-y^4}-n(1+y^2)}{2y^2}.$$

123. $\dfrac{5-2b^2-3c^2-5\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}}{c^2-b^2}$.

124. $\dfrac{(x^2-y^2)\sqrt{m^6-n^4}-2n^2xy}{x^2(m^3-n^2)-y^2(m^3+n^2)}$.

125. $\dfrac{4+xy-\sqrt{(4-x^2)(4-y^2)}}{2(x+y)}$.

126. $\dfrac{xy+\alpha\beta+\sqrt{(x^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)}}{\alpha y+\beta x}$.

127. $\dfrac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy-1}{x+y}$.

128. $\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{a+\alpha}+\sqrt{a-\alpha}-\sqrt{a+\beta}+\sqrt{a-\beta})(\sqrt{a^2-\beta^2}+\sqrt{a^2-\alpha^2})\\ \times(\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a-\alpha}-\sqrt{a+\beta}+\sqrt{a-\beta})\end{array}\right\}}{2(\alpha^2-\beta^2)}$, ou :

$$\frac{\left\{a+\alpha-\sqrt{(a+\alpha)(a+\beta)}+\sqrt{(a+\alpha)(a-\beta)}-\sqrt{a^2-\beta^2}\right\}\times\left\{\sqrt{a^2-\beta^2}+\sqrt{a^2-\alpha^2}\right\}}{\alpha^2-\beta^2}.$$

129. $$\frac{\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2+1}+\sqrt{y^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y^2-1})\\ \times(x^2-y^2-\sqrt{x^4-1}+\sqrt{y^4-1})(1-x^2y^2-\sqrt{(x^4-1)(y^4-1)})\end{array}\right\}}{4(x^2-y^2)^2}, \text{ ou :}$$

$$\frac{(2-\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)})(x^2-y^2-\sqrt{x^4-1}+\sqrt{y^4-1})(1-x^2y^2-\sqrt{(x^4-1)(y^4-1)})}{2(x^2-y^2)^2}.$$

130. $$\frac{\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}+\sqrt{p+1}-\sqrt{p-1})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}+\sqrt{p+1}+\sqrt{p-1})\\ \times(m-p+\sqrt{m^2-1}+\sqrt{p^2-1})(1-pm+\sqrt{(m^2-1)(p^2-1)})\end{array}\right\}}{2(m-p)^2}, \text{ ou :}$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\{m+1-\sqrt{m^2-1}+\sqrt{(m+1)(p+1)}-\sqrt{(m-1)(p+1)}\}\\ \times\{m-p+\sqrt{m^2-1}+\sqrt{p^2-1}\}\{1-mp+\sqrt{(m^2-1)(p^2-1)}\}\end{array}\right\}}{2(m-p)^2}.$$

131. $$\frac{\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{\beta-1}+\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\delta-1}+\sqrt{\delta+1})(\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\delta-1}+\sqrt{\delta+1})\\ \times(\beta-\delta+\sqrt{\beta^2-1}+\sqrt{\delta^2-1})(1-\beta\delta+\sqrt{(\beta^2-1)(\delta^2-1)})\end{array}\right\}}{2(\beta-\delta)^2}, \text{ ou :}$$

$$\frac{(\delta-1+\sqrt{\delta^2-1}+\sqrt{(\beta-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\beta-1)(\delta+1)})(\beta-\delta+\sqrt{\beta^2-1}+\sqrt{\delta^2-1})(1-\beta\delta+\sqrt{(\beta^2-1)(\delta^2-1)})}{2(\beta-\delta)^2}.$$

132. $\dfrac{8(4\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}+6+3\sqrt{2}\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3^2})}{2^3-3^2}$.

133. $\dfrac{11(42\sqrt{3}-42\sqrt[4]{5}+14\sqrt{15}-14\sqrt[4]{5^3})}{3^4-5^2}=\dfrac{11(3\sqrt{3}-3\sqrt[4]{5}+\sqrt{15}-\sqrt[4]{5^3})}{4}$.

134. $\dfrac{(m-n)(a^2\sqrt{a}+a^2\sqrt[3]{b^2}+ab\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+ab^2+b^2\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}+b^3\sqrt[3]{b})}{a^3-b^4}$.

135. $\dfrac{(a-1)(a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}-ab+b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{b^2})}{a^3-b^2}$.

136. $\dfrac{(a+b)(\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{y^2})(x^6+x^3y\sqrt[3]{y}+y^2\sqrt[3]{y^2})}{x^9-y^4}$, ou :

$$\frac{(a+b)(x^7\sqrt{x}-x^6\sqrt[3]{y^2}+x^4y\sqrt{x}\sqrt[3]{y}-x^3y^2+xy^2\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}-y^3\sqrt[3]{y})}{x^9-y^4}.$$

137. $\dfrac{(\sqrt{m^5}-\sqrt[3]{y^5})(m^{10}+m^5\sqrt[3]{y^{10}}+\sqrt[3]{y^{20}})}{m^2(m^{15}-y^{10})}$, ou :

$$\frac{m^{12}\sqrt{m}-m^{10}y\sqrt[3]{y^2}+m^7y^3\sqrt{m}\sqrt[3]{y}-m^5y^5+m^2y^6\sqrt{m}\sqrt[3]{y^2}-y^8\sqrt{y}}{m^2(m^{15}-y^{10})}.$$

138. $\dfrac{(x^2+2y)(\sqrt{y}+\sqrt[4]{x^3})(y+\sqrt{x^3})}{x^3-y^2}$, ou :

$$\frac{(x^2+2y)(x^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{xy}+y\sqrt[4]{x^3}+y\sqrt{y})}{x^3-y^2}.$$

139. $\dfrac{n^2(\sqrt{a}-\sqrt[8]{b^3})(a^3+a^2\sqrt[4]{b^3}+a\sqrt[4]{b^6}+\sqrt[4]{b^9})}{a^4-b^3}$, ou :

$$\frac{\left\{\begin{matrix}(a^3\sqrt{a}-a^3\sqrt[8]{b^3}+a^2\sqrt{a}\sqrt[4]{b^3}-a^2b\sqrt[8]{b}+ab\sqrt{ab}-\\ ab\sqrt[8]{b^7}+b^2\sqrt{a}\sqrt[4]{b}-b^2\sqrt[8]{b^5})n^2\end{matrix}\right\}}{a^4-b^3}.$$

140. $\dfrac{3(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{b})(a^2\sqrt[3]{a^2}+ab\sqrt[3]{a}+b^2)}{a^4-b^3}$, ou :

$$\frac{3\left\{\begin{matrix}a^3\sqrt[3]{a^2}-a^3\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}+a^3\sqrt{b}-a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{b^3}+a^2b\sqrt[3]{a}-a^2b\sqrt[4]{b}+\\ ab\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}-ab\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b^3}+ab^2-b^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{b}+b^2\sqrt[3]{a}\sqrt{b}-b^2\sqrt[4]{b^3}\end{matrix}\right\}}{a^4-b^3}.$$

XXXII

7. Calcul des imaginaires.

1. $2\sqrt{-1}.$ **2.** $5\sqrt{-1}.$ **3.** $9\sqrt{-1}.$ **4.** $12\sqrt{-1}.$

5. $a\sqrt{-1}.$ **6.** $b^2\sqrt{-1}.$ **7.** $2\sqrt[4]{-1} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{-1}.$

8. $3\sqrt[4]{-1} = \frac{3}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1}).$

9. $5\sqrt[4]{-1} = \frac{5}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1}).$ **10.** $2\sqrt[6]{-1} = 2\sqrt{-1}.$

11. $3\sqrt[6]{-1} = 3\sqrt{-1}.$

12. $2\sqrt[8]{-1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{-1}.$

13. $x^2\sqrt[4]{-1} = \frac{x^2}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{-1}).$

14. $y^2\sqrt[4]{y}\sqrt[4]{-1} = y^2\sqrt[4]{\frac{y}{4}}\,(1 + \sqrt{-1}).$ **15.** $z^3\sqrt{-1}.$

16. $u^2\sqrt{-1}.$ **17.** $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ **18.** $\frac{a^2}{b}\sqrt{-1}.$ **19.** $\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{-1}.$

20. $\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}(1 + \sqrt{-1}).$

21. $(3x - 2y^2)^2\sqrt{-1}.$ **22.** $3x^3\sqrt{-1}.$ **23.** $9m^3\sqrt{-1}.$

24. -1 ; 1 ; 1 ; 1 ; $\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}.$

25. $-\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}$; 1 ; 1 ; -1 ; $\sqrt{-1}$; $-1.$

---

26. $10\sqrt{-1}.$ **27.** $(3a^2 - 7a)\sqrt{-1}.$

28. $2(x - y + 4xy)\sqrt{-1}.$ **29.** $(10a^3 - a^4)\sqrt{-1}.$

30. $m(1 + 2n)i.$ **31.** $11 - 3i.$ **32.** $\frac{25a - 33b}{2}\sqrt{-1}.$

33. $2\{13 + (1 + b)i\}.$

---

34. $-a$. **35.** -12. **36.** $-\sqrt{mn}$. **37.** $-\sqrt{y}$.

38. $35\sqrt{-1}$. **39.** $a^6\sqrt{-1}$. **40.** $-12yz^3$. **41.** $3m^3$.

42. $-z$. **43.** -6. **44.** $8\sqrt{14}$. **45.** 77.

46. $-\sqrt{a^2-b^2}$. **47.** $(x-y)\sqrt{-1}$. **48.** $(y-5)\sqrt{-1}$.

49. $-3\sqrt{2-y}$. **50.** a^2+1. **51.** $m^2-b^2i^2=m^2+b^2$.

52. $47-\sqrt{-1}$. **53.** $xy+2b+(2y-bx)\sqrt{-1}$.

54. $6(xy+4)+(9x-16y)\sqrt{-1}$.

55. $2ac+3bd+(3bc-2ad)\sqrt{-1}$. **56.** $16-2i\sqrt{2}$.

57. $mn+12\sqrt{bc}+(4m\sqrt{c}-3n\sqrt{b})i$.

58. $2(15+2\sqrt{3})+2(3-\sqrt{10})i$. **59.** 10. **60.** $-(a^2+x^2)$.

61. $x+y$. **62.** $\sqrt{a^2+1}$. **63.** $\sqrt{2}$. **64.** $\sqrt{41}$. **65.** 6.

66. 10. **67.** $-(7+24\sqrt{-1})$. **68.** $-(13+84\sqrt{-1})$.

69. a^2-b^2+2abi. **70.** $x^4-c^6-2c^3x^2i$.

71. $m^6-x^2+2m^3xi$. **72.** $4y^6-9z^2-12y^3zi$.

73. $1-4a^2+4ai$. **74.** $-2e\sqrt{-1}$.

75. $n^2-e^3+2eni\sqrt{e}$. **76.** $z^3-z-2iz^2$.

77. $5+a-2\sqrt{5a}$. **78.** $3a^2-a-a^3+2a\sqrt{a}(1-a)i$.

79. $x^4-3x+2x\sqrt{2}-2x^2(\sqrt{x}-\sqrt{2x})i$.

80. $4a^2+4a\sqrt{b}+b-9-6(2a+\sqrt{b})i$.

81. $-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$.

82. $-(x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2)$.

83. $-(c^4+2c^3+c^2-2c+\frac{1}{c^2}-2)$.

84. $-3,24+1,8a-0,25a^2$.

85. $-0,25a^4-0,06a^2-0,01-(0,2a^3+0,04a)i$.

86. $-(m^2+n^2-p^2+2mn+2mpi+2npi)$.

87. $-(x^3i+3x^2yi+3xy^2i+y^3i)$.

88. $-(a^3i-3a^2bi+3ab^2i+b^3i)$.

89. $-(c^3i - 3c^2di + 3cd^2i - d^3i)$.

90. $v^3 - 3vz^2 + (3v^2z - z^3)i$.

91. $n^3(3m^4 - n^6) + m^2(3n^6 - m^4)i$.

92. $p^3(p^6 - 3r^8) + r^4(3p^6 - r^8)i$.

93. $2a(4a^2 - 27b^2) - 9b(4a^2 - 3b^2)i$.

94. $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{3b^2}{4}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{3}{c^2} - \frac{b^2}{4}\right)i$. **95.** $8xy(x^2 - y^2)i$.

96. $2m^5 - 20m^3n^2 + 10mn^4$. **97.** 32.

98. $-(12a^5 - 40a^3 + 12a)i$.

99. $4a^2(1 - a^2) - a(9 - 14a^2 + a^4)i$.

100. $a^4 + a^3 + b^4 - 3ab^2(2a + 1) + b\,(4a^3 - 4ab^2 - 3a^2 + b^2)i$.

101. $$\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\sqrt{-3}\right)^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\right)^3\left(1 - \sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8}\cdot a.\,(-8) = a.$$

102. On met la parenthèse sous la forme :

$(-1 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}$, et on élève ce binome à la 5e puissance au moyen de la table du paragraphe XVI, page 25. — Réponse 1.

---

103. $-a\sqrt{-1}$. **104.** $-\sqrt{-1}$. **105.** $-\frac{di}{2}$. **106.** $\sqrt{3}$.

107. $\sqrt{\frac{m}{n}}$. **108.** $\sqrt{a}$. **109.** $-i\sqrt{x}$. **110.** $-\sqrt{-1}$.

111. $-i\sqrt{m}$. **112.** $\sqrt{x}$. **113.** 2. **114.** $m\sqrt{2}$. **115.** $\sqrt{b}$.

116. $-m$. **117.** $-\sqrt{p}$. **118.** $-\sqrt{c^3}$. **119.** $\frac{i\sqrt{d}}{d}$. **120.** 1.

121. $a + b\sqrt{-1}$. **122.** $\frac{(x^2 - y^2)(x - y\sqrt{-1})}{x^2 + y^2}$.

123. $\sqrt{m} - i\sqrt{n}$. **124.** $i\sqrt{a} + \sqrt{b} - i\sqrt{m}$. **125.** $i\sqrt{xy} + y - i\sqrt{z}$.

---

126. $\frac{6-2\sqrt{-2}}{11}$. **127.** $7-7\sqrt{-7}$. **128.** $\frac{12(7-2\sqrt{-5})}{23}$.

129. $-\frac{2i(3+2\sqrt{6})}{15}$. **130.** $-\frac{11+4i\sqrt{3}}{13}$.

131. $-\frac{191+30i\sqrt{8}}{209}$. **132.** $-\frac{73+70i\sqrt{2}}{123}$. **133.** $\frac{1+i}{2}$.

134. $\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$. **135.** $\frac{a^2-x+2ai\sqrt{x}}{a^2+x}$.

136. $\frac{x^3-3xz^2+(3x^2z-z^3)i}{(x^2+z^2)^2}$. **137.** $-\frac{1}{2}$.

138. $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$. **139.** i. **140.** 1. **141.** $\frac{1}{8i}$.

142. $\frac{0}{2}=0$. **143.** $\frac{2a^2-8}{a^2+4}$. **144.** $\frac{x-y-2xi\sqrt{y}}{x^2+y}$.

145. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. **146.** -1. **147.** $-\frac{(x+\sqrt{x^2+y})i}{\sqrt{y}}$.

148. $\frac{(x\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{2x^4-3x^2b^2+b^4})i}{b^2-x^2}$.

---

149. $a^{2\sqrt{-1}}$. **150.** $a^{5\sqrt{-1}}$. **151.** $x^{-3\sqrt{-1}}$.

152. $m^{-(4-3\sqrt{-1})}$. **153.** $x^{-(2+3\sqrt{-1})}$. **154.** $a^{\sqrt{-1}}$.

155. $m^{-8\sqrt{-1}}$. **156.** $\frac{1}{a^{\sqrt{-1}}}$. **157.** $a^{(m+n)\sqrt{-1}}$

158. $a^{(2-p)\sqrt{-1}}$. **159.** $a^{4\sqrt{-1}}$. **160.** x^{-8}. **161.** m^{-15}.

162. a^{m+2}. **163.** $x^{a^2+b^2}$. **164.** x^{2a}.

---

165. $3^4=81$. **166.** $7^2=49$. **167.** $6^{4+9}=6^{13}$.

168. $5^6=15\,625$. **169.** $8^{-5}=\frac{1}{32768}$. **170.** $2^{-12}=\frac{1}{4096}$.

III. RACINE CARRÉE ET RACINE CUBIQUE

XXXIII

1. Racine carrée des nombres.

1. 31. **2.** 27. **3.** 56. **4.** 64. **5.** 75. **6.** 83.
7. 97. **8.** 72. **9.** 87. **10.** 59. **11.** 42. **12.** 93.
13. 17. **14.** 38. **15.** 55. **16.** 99. **17.** 115.
18. 124. **19.** 213. **20.** 327. **21.** 508. **22.** 340.
23. 723. **24.** 617. **25.** 473. **26.** 854. **27.** 158.
28. 246. **29.** 374. **30.** 409. **31.** 623. **32.** 786.
33. 837. **34.** 908. **35.** 719, reste 15. **36.** 179.
37. 256. **38.** 563. **39.** 536. **40.** 328. **41.** 8 237.
42 2 456. **43.** 4 593. **44.** 1 285. **45.** 6 741.
46. 8 124. **47.** 7 612. **48.** 9 038. **49.** 3 014.
50. 1 790. **51.** 2 457. **52.** 5 048. **53.** 4 897.
54. 9 868. **55.** 7 302. **56.** 6 956. **57.** 7 011.
58. 35 028 (1). **59.** 89 014; *r* 68611. **60.** 79 879. **61.** 98 019.
62. 69 548. **63.** 74 852; *r* 129 532. **64.** 89 727; *r* 97 999.
65. 37 121. **66.** 90 107. **67.** 21 608. **68.** 48 935.
69. 53 214. **70.** 611 012. **71.** 326 258. **72.** 248 209.
73. 701 407. **74.** 500 109. **75.** 435 829. **76.** 989 789.
77. 3 135 617. **78.** 4 187 132. **79.** 5 240 935. **80.** 1 012 034.
81. 9 503 807. **82.** 2 620 749. **83.** 1 548. **84.** 47 475.

(1) Lorsque le nombre des chiffres de la racine est grand, on peut employer le mode abrégé que voici : *Quand on connaît* n *chiffres d'une racine carrée, on peut toujours en obtenir* n — 1 *nouveaux, en divisant le reste par le double de la racine déjà obtenue. Cette division en fournit même* n *nouveaux, si le premier chiffre de la racine est* 5 *ou plus.*

85. 69 750. **86.** 32 400. **87.** 321. **88.** 513.
89. 417. **90.** 27. **91.** 34.

---

92. $\frac{37}{5}$. **93.** $\frac{51}{14}$. **94.** $\frac{68}{36} = \frac{17}{9}$. **95.** $\frac{41}{83}$. **96.** $\frac{34}{15}$. **97.** $\frac{73}{18}$.
98. $\frac{16}{53}$. **99.** $\frac{21}{132} = \frac{7}{44}$. **100.** $\frac{24}{213} = \frac{8}{71}$. **101.** $\frac{79}{7}$.
102. $104\frac{2}{3}$. **103.** $27\frac{2}{5}$. **104.** $54\frac{3}{4}$. **105.** $35\frac{1}{12}$. **106.** $23\frac{1}{2}$.
107. $5\frac{3}{7}$. **108.** $56\frac{2}{3}$. **109.** $76\frac{3}{8}$. **110.** $118\frac{5}{6}$. **111.** $171\frac{1}{3}$.
112. 0,37. **113.** 0,58. **114.** 0,67. **115.** 0,514. **116.** 0,816.
117. 0,171. **118.** 0,104. **119.** 0,312. **120.** 0,031 4.
121. 0,063. **122.** 0,001 4. **123.** 0,013 7. **124.** 0,021 8.
125. 0,009 3. **126.** 0,086.

---

127. $6\frac{0,8}{5}$. **128.** $6\frac{3}{4}$. **129.** $10\frac{4,6}{8}$. **130.** $6\frac{2,5}{3}$. **131.** $9\frac{8}{11}$.
132. $9\frac{1,9}{6}$. **133.** $10\frac{3,17}{16}$. **134.** 10. **135.** $17\frac{1,9}{3}$. **136.** $14\frac{3}{7}$.
137. $20\frac{3,8}{9}$. **138.** 14,59. **139.** 5,196. **140.** 9,055.
141. 17,748 2. **142.** 7,810. **143.** 8,660 25. **144.** 3,464 10.
145. 1,414 213 5. **146.** 2,645 75. **147.** 1,774 8. **148.** 4,125 5.
149. 2,844 29. **150.** 8,677. **151.** 5,84. **152.** 11,882 7.
153. 17,82. **154.** 1,017 8. **155.** 1,595 4. **156.** 2,549.
157. 1,457 6. **158.** 2,075 6. **159.** 2,738. **160.** 0,84.
161. 0,674. **162.** 0,707 1. **163.** 18,055 472.
164. 5,385 164. **165.** 22,158 51. **166.** 26,944 387.
167. 19,773 720. **168.** 31,937 438. **169.** 30,577 769.
170. 29,017 236. **171.** 26,814 17. **172.** 12,041 59.
173. 3,056 70. **174.** 5,214 587 1. **175.** 1,914 854.
176. 1,772 40. **177.** 1,146 87.

---

178. $\sqrt{121 - 1} = 11 - \frac{1}{22} = 10{,}955$. **179.** 11,959.

180. 60,016 7. **181.** 20,025. **182.** 10,05. **183.** 100,02.

184. 99,985. **185.** 300,006 6. **186.** 1200,003 7.

187. 899,997 2. **188.** 79,975. **189.** 200,007 5.

XXXIV

2. Racine carrée des quantités algébriques.

1. a^2b^3. **2.** x^4y. **3.** $a^5b^3y^6$. **4.** x^2yz^5. **5.** m^8n^7b.

6. px^9. **7.** $2a^3y^2$. **8.** $3h^6y^3$. **9.** $12m^3$. **10.** $5a^6b^{10}$.

11. $\frac{1}{2}x^3m$. **12.** $0{,}5y^4$. **13.** $\frac{2}{3}x^4y^{\frac{7}{2}}$. **14.** $\frac{1}{5}a^{\frac{1}{2}}b^7$. **15.** $\frac{3}{11}x^{\frac{3}{2}}z^{10}$.

16. $0{,}3m^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$. **17.** $0{,}1y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{9}{2}}$. **18.** $0{,}4v^{\frac{5}{2}}$. **19.** $x + y$.

20. $m^2 - n^2$. **21.** $2x^2 - 3y^3$. **22.** $5a^3 + 2b^7$. **23.** $\frac{1}{2}a^4 - \frac{2}{3}b$.

24. $\frac{2}{5}m^5 + \frac{5}{7}n$. **25.** $a^3 + 2a^2b - 3ab^2$. **26.** $3x^2 + xy - 5y^2$.

27. $4x^3 - 3x^2y + 7xy^2$. **28.** $2a^2 - 3ab^2 - b^3$.

29. $a + 2b - c$. **30.** $m^5 - 3m^4n - 6n^2$. **31.** $a^2 - a + 1$.

32. $1 + x - x^3$. **33.** $m + n + p$. **34.** $x + y + z$.

35. $a + b + c + d$. **36.** $x + y + z + u$.

37. $m - n + p - q$. **38.** $a + 2b + 3c$. **39.** $3a + 4b + 5c$.

40. $2x - 3y + 4z$. **41.** $x - 2y + 1$. **42.** $1 + 3x - 4y$.

43. $3a + 5b - 4c$. **44.** $5x - 2 + 3y$. **45.** $2x^2 - 3y^3 + 4z^5$.

46. $2 - a + 3a^2$. **47.** $ab + a - b$. **48.** $x^2 - 4x + 1$.

49. $3a^2 - 5b + 8m - z$. **50.** $y^5 - 2u^3 + 3v^4 - 4q^5$.

51. $a^2 - 3c^5 - 4d^{2x} + 3e^y$. **52.** $3a^3 - 2a^2b - 7ab^2 + 4b^3$.

53. $4a^3 - 2b^2 + 3c^5 - 2d^2$. **54.** $2x^3 + 3y^4 - 5z + 1$.

55. $a^2b - 2a^3b^2 + 3ab^3 - a$. **56.** $5ax^2 - 4a^3x + 3a^2x^5 - x^3$.

57. $7x^4 + 5x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - 3y^4$.

58. $3a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4.$

59. $5m^5 - 4m^3n + 2mn^3 - 4n^5 + 8.$

60. $x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - 4x^2y^3 + 5xy^4 - 2y^5.$

61. $3a^9 + 5a^7x - 7a^5x^3 + 9a^3x^5 - 11ax^7 + 2x^9.$

62. $\frac{m^2}{2} - \frac{n^3}{3} + \frac{p^4}{4}.$ **63.** $\frac{x}{y} - \frac{2z}{u} + \frac{3q}{v}.$

64. $\frac{3}{5} - \frac{a^4}{5} - \frac{m^3}{6} + \frac{2n^4}{7}.$ **65.** $\frac{3m^3n^2}{5p^3q^4} - \frac{2m^2n^3}{7p^4q^5} - \frac{4mn^4}{9p^5q^6}.$

66. $\frac{3y}{4x} - 5 + \frac{2x}{7y}.$ **67.** $\frac{x^2}{2y^2} + 1 + \frac{2y^2}{x^2}.$

68. $x + \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^3} + \frac{a^3}{16x^5} - \frac{5a^4}{128x^7} + \frac{7a^5}{256x^9} - \text{etc.}$

69. $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} - \frac{1}{16a^5} - \frac{5}{128a^7} - \frac{7}{256a^9} - \text{etc.}$

70. $a - \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} - \frac{x^3}{16a^5} - \frac{5x^4}{128a^7} - \frac{7x^5}{256a^9} - \text{etc.}$

71. $\frac{1}{x} + \frac{a}{2x^3} + \frac{3a^2}{8x^5} + \frac{5a^3}{16x^7} + \frac{35a^4}{128x^9} + \frac{63a^5}{256x^{11}} + \text{etc.}$

72. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \text{etc.}$

---

73. $0{,}5a^3 - 0{,}3b^2 - 0{,}7l^{-2}.$ **74.** $0{,}1m^{\frac{1}{5}} - 0{,}2n^{-\frac{1}{3}} - 0{,}3n^{-\frac{4}{3}}.$

75. $0{,}6x^{\frac{2}{3}} + 0{,}8y^{\frac{1}{4}} - 0{,}9z^{-4}.$ **76.** $\frac{2x^2}{3} - \frac{4y^{-1}}{7} + \frac{8z^{\frac{2}{3}}}{9} - \frac{4u^{-\frac{3}{5}}}{5}.$

77. $a^mx^{n-1} - 4ab^{\frac{3}{2}} - \frac{3c}{x^{n+1}}.$ **78.** $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$

79. $a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}}.$ **80.** $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}.$

81. $3a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{-1} - \frac{2b^{-\frac{1}{4}}}{5} + \frac{7c^{-\frac{1}{5}}}{x\sqrt{-1}}.$

82. $-2x^{-3} + 4b^{-\frac{1}{4}}\sqrt{-1} - 3c^{\frac{1}{5}}\sqrt{-1}$. **83.** $2x - 3y$.
84. $1 - 2x$. **85.** $5 + 4a$. **86.** $1 - z + z^2$.
87. $a^2 - (\alpha + \beta)a + \alpha\beta$. **88.** $m + 1$. **89.** $2x - 3y^2$.

XXXV

3. Racine cubique des nombres.

1. 15. **2.** 17. **3.** 12. **4.** 23. **5.** 32. **6.** 45.
7. 51. **8.** 36. **9.** 28. **10.** 42. **11.** 39. **12.** 54.
13. 53. **14.** 62. **15.** 82. **16.** 75. **17.** 96. **18.** 87.
19. 74. **20.** 92. **21.** 154. **22.** 213. **23.** 415. **24.** 314.
25. 206. **26.** 516. **27.** 351. **28.** 451. **29.** 519. **30.** 137.
31. 274. **32.** 326. **33.** 527. **34.** 618. **35.** 814. **36.** 947.
37. 738. **38.** 854. **39.** 764. **40.** 458. **41.** 1 829. **42.** 5 123.
43. 2 523. **44.** 4 928. **45.** 6 031. **46.** 8 402, reste 567 891.
47. 2 514. **48.** 3 247. **49.** 6 345. **50.** 7 846.
51. 7 088, reste 743. **52.** 8 219, reste 4 397.
53. 41 195, reste 66 477. **54.** 219 812. **55.** 17 479.
56. 312 456. **57.** 34. **58.** 45. **59.** 35. **60.** 48. **61.** 13.

---

62. $\frac{3}{5}$. **63.** $\frac{2}{7}$. **64.** $\frac{5}{8}$. **65.** $\frac{7}{9}$. **66.** $\frac{13}{15}$. **67.** $\frac{12}{17}$.
68. $\frac{6}{7}$. **69.** $\frac{23}{24}$. **70.** $\frac{25}{31}$. **71.** $\frac{22}{35}$. **72.** $13\frac{1}{2}$. **73.** $5\frac{1}{3}$.
74. $6\frac{3}{5}$. **75.** $4\frac{6}{7}$. **76.** $8\frac{5}{6}$. **77.** $12\frac{1}{5}$. **78.** $\frac{71}{6}$ appr. $\left(\frac{71,073}{6}\right)$.
79. $26\frac{5}{8}$. **80.** $18\frac{1}{7}$. **81.** $5\frac{3,2}{9}$. **82.** 0,09. **83.** 0,12. **84.** 0,26.
85. 0,041. **86.** 0,219. **87.** 0,53. **88.** 0,63. **89.** 0,49.
90. 0,018. **91.** 0,002 3. **92.** 0,031 3. **93.** 0,056.
94. 0,381. **95.** 0,085.

---

96. $1\frac{5}{9}$. **97.** $2\frac{6,99}{15}$. **98.** $2\frac{1}{2}$. **99.** $4\frac{3,6}{8}$. **100.** $2\frac{4,5}{6}$.
101.(*) $3\frac{2}{11}$. **102.** $3\frac{5,6}{7}$. **103.** 6. **104.** 8. **105.** $5\frac{1}{3}$.
106. $7\frac{5,57}{13}$. **107.** 6. **108.** $5\frac{4,6}{7}$. **109.** $5\frac{8,68}{9}$. **110.**(*) $6\frac{2}{3}$.
111. $4\frac{7}{11}$. **112.** 1,44. **113.** 2,351. **114.** 2,88. **115.** 3,779 7.
116. 1,912 93. **117.** 1,765. **118.** 1,493. **119.** 4,335 6.
120. 8,182 8. **121.** 9,338. **122.** 9,831 68. **123.** 7,475 7.
124. 0,599. **125.** 0,345 3. **126.** 0,151 82. **127.** 0,711 38.
128. 1,093. **129.** 2,055 1. **130.** 5,568 47. **131.** 3,449.
132. 3,843 49. **133.** 3,087. **134.** 5,075. **135.** 0,752 2.

---

136. 9,535. **137.** 10,746 2. **138.** 9,920. **139.** 8,025 9.
140. 11,785 54. **141.** 17,002. **142.** 20,779 2. **143.** 23,368.
144. 38,356 5. **145.** 27,550. **146.** 1,481 6. **147.** 6,824 3.
148. 2,488 7. **149.** 8,836 5. **150.** 21,551 5.

---

151. 9,008 2. **152.** 7,013 5. **153.** 15,004 4. **154.** 7,989 6.
155. 9,993 3. **156.** 20,005 8. **157.** 19,995 8. **158.** 50,001 2.
159. 59,999 2. **160.** 39,998 7.

XXXVI

4. Racine cubique des quantités algébriques.

1. a^3xy^2. **2.** b^4z^2. **3.** $-d^5c^3$. **4.** $-3a^3b^6$. **5.** $5x^7y$.
6. $4x^4y^{10}$. **7.** $-6a^{20}b^{15}$. **8.** $2m^2n^4$. **9.** $-243a^5b^{\frac{10}{3}}$.

(*) Dans les n°s 101 et 110, les réponses $3\frac{3}{11}$, $6\frac{5}{6}$, sont plus rapprochées, par excès, de la racine exacte.

10. $\frac{1}{2}c^2y^9$. **11.** $\frac{3a^3b^4}{4xy^5}$. **12.** $-\frac{4x^{\frac{7}{3}}y^4}{5z^{\frac{8}{3}}}$. **13.** $\frac{1}{6z^{12}}$. **14.** $\frac{0,5}{a^2x^3z^{\frac{1}{3}}}$.

15. $-0,03m^{\frac{11}{3}}$. **16.** $-0,4m^3\sqrt{-1}$. **17.** $-0,5a^4b^{\frac{5}{3}}\sqrt{-1}$.

18. $10z^7u^{\frac{4}{3}}\sqrt{-1}$. **19.** $\frac{2x^{\frac{5}{3}}}{7y^2\sqrt{-1}}$. **20.** $-\frac{a^3bi^2}{3} = \frac{a^3b}{3}$.

21. $x + y$. **22.** $\alpha - \beta$. **23.** $m^2 - n$. **24.** $x + y^2$.

25. $2a - b$. **26.** $d + 3e$. **27.** $5a + 3b$. **28.** $4d - 3e$.

29. $7p + 5r$. **30.** $5u - 4v$. **31.** $7x^2 + 3y^5$. **32.** $2a^3 - 3b^4$.

33. $m^4 + 2n$. **34.** $\frac{a^2}{3} - 3b^4$. **35.** $2a + 3b - c$.

36. $2x - 4y + z$. **37.** $5m + 2n + p$. **38.** $a - 3y + 2b$.

39. $7x - 3u + v$. **40.** $5a^3 - 2b^2 + c^4$.

41. $2x^5 + 3y^2 - 2z^3$. **42.** $3a^4 - b^5 + 6d^7$.

43. $10m^2 - 3n - 2p$. **44.** $2a^2b + 3ab^2 - 2b^3$.

45. $5x^3y - 2x^2y^3 + 3xy$. **46.** $6m^2n^3 - 4m^3n^4 + 5mn^2$.

47. $3ax^2 + 2a^2x^3 - 5a^3x^4$. **48.** $\frac{1}{2}b^2y - 2by^2 + 3b^3y^3$.

49. $5a^3 - 2a^2b + 3b^3$. **50.** $4x - 3x^2y - 2x^3y^2$.

51. $2a - 3b^2 + c^3 - 4d$. **52.** $a^2 - 2b^3 + 3c^5 - 2d^4$.

53. $5x - 2y^3 + 4z^2 + 3u^4$. **54.** $3m^2 - 2n^3 + 4p^5 - 2q^{10}$.

55. $6a^2 - b^6 + 2c^4 - 3d^5$. **56.** $\frac{2a^2}{x} - \frac{3a^3}{x^2} + \frac{a^4}{x^3}$.

57. $\frac{m^3}{y^5} + \frac{m^2}{y^4} - \frac{m}{y^3}$. **58.** $\frac{5x}{y^2} - \frac{x^2}{2y^3} + \frac{4x^3}{y^4}$.

59. $\frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{5}{a^4}$. **60.** $\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a^2} + \frac{5a^3}{2b^2}$.

61. $\frac{2a}{x^2} + \frac{3a^2}{x^3} + \frac{4a^3}{x^4}$. **62.** $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5}$.

63. $\frac{a^3b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{xy} - \frac{ab^3}{y^2}$. **64.** $\frac{mn}{x} - \frac{2m^3}{x^2} - \frac{n^3}{x^3}$.

65. $1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} + \frac{5a^3}{81} - \frac{10a^4}{243} + \frac{22a^5}{729} - \frac{154a^6}{6561} + \text{etc.}$

66. $1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} - \frac{5a^3}{81} - \frac{10a^4}{243} - \frac{22a^5}{729} - \frac{154a^6}{6561} - \frac{374a^7}{19683} - \text{etc.}$

67. $a + \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} + \frac{5b^3}{81a^8} - \frac{10b^4}{243a^{11}} + \frac{22b^5}{729a^{14}} - \frac{154b^6}{6561a^{17}} + \text{etc.}$

68. $a - \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} - \frac{5b^3}{81a^8} - \frac{10b^4}{243a^{11}} - \frac{22b^5}{729a^{14}} - \frac{154b^6}{6561a^{17}} - \text{etc.}$

69. $a + \frac{1}{3a^2} - \frac{1}{9a^5} + \frac{5}{81a^8} - \frac{10}{243a^{11}} + \frac{22}{729a^{14}} - \frac{154}{6561a^{17}} + \text{etc.}$ (1)

70. $a - \frac{1}{3a^2} - \frac{1}{9a^5} - \frac{5}{81a^8} - \frac{10}{243a^{11}} - \frac{22}{729a^{14}} - \frac{154}{6561a^{17}} - \text{etc.}$

71. $a - \frac{1}{3} - \frac{1}{9a} + \frac{22}{81a^2} + \frac{44}{243a^3} + \frac{113}{729a^4} + \frac{197}{6561a^5} + \text{etc.}$

---

72. $2x^{-1} - 3x^{-2} + 4x^{-4}$. **73.** $0{,}2y^{-3} - 0{,}8y^{-4} - 0{,}1y^{-5}$.

74. $0{,}5a^{-1} + 0{,}2a^{-3} - 4a^{-5}$. **75.** $0{,}02m^{-2} - 0{,}1m^{-1} + 0{,}7$.

76. $4a^{\frac{1}{3}} + 2a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{7}{3}}$. **77.** $3b^{\frac{2}{5}} - 4b^{\frac{3}{5}} - 5b^{\frac{4}{5}}$.

78. $0{,}7x^{\frac{3}{7}} + 0{,}8x^{\frac{4}{7}} - 0{,}6x^{\frac{5}{7}}$. **79.** $ax^{\frac{1}{7}} - a^2x^{\frac{2}{7}} + 2a^3x^{\frac{3}{7}}$.

80. $3x^{-1}\sqrt{-1} + 2x^{-2}\sqrt{-1}$. **81.** $4y^{-3}\sqrt{-1} - 3y^{-4}\sqrt{-1}$.

82. $2a^{-1}\sqrt{-1} - 3a^{-2}\sqrt{-1} + 4a\sqrt{-1}$.

83. $4ix^{-\frac{1}{2}} - ix^{-\frac{3}{4}} + 3ix^{-1}$. **84.** $3x - 1$. **85.** $3y^4 - y^2$.

86. $2x - 3x^2$.

---

(1) Les résultats donnés pour les numéros 69 et 70 supposent $a > 1$. Dans le cas de $a < 1$, ces développements deviennent respectivement :

$$1 + \frac{a^3}{3} - \frac{a^6}{9} + \frac{5a^9}{81} - \frac{10a^{12}}{243} + \text{etc.}; \quad -1 + \frac{a^3}{3} + \frac{a^6}{9} + \frac{5a^9}{81} + \frac{10a^{12}}{243} + \text{etc.}$$

Ces derniers résultats se tirent facilement du développement du numéro 67, en y faisant $a = 1$; $b = a^3$, ou: $a = -1$; $b = a^3$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES OU EMBARRASSÉES DE RADICAUX RENTRANT DANS LE PREMIER DEGRÉ

XXXVII

1. Équations du premier degré embarrassées de radicaux.

1. 16. **2.** 4. **3.** 144. **4.** 80. **5.** 8. **6.** 32.

7. $\frac{1}{16}$. **8.** $1\frac{1}{4}$. **9.** $6\frac{3}{4}$. **10.** 2. **11.** 2. **12.** $5\frac{2}{5}$.

13. 12. **14.** 9. **15.** 2. **16.** 22. **17.** 5. **18.** 8.

19. $\frac{1}{4}$. **20.** 1. **21.** $\frac{9}{10}$. **22.** 2. **23.** 3. **24.** $\frac{25}{16}$.

25. $12\frac{1}{4}$. **26.** $\frac{1}{3}$. **27.** $\frac{1}{4}$. **28.** $\frac{4}{9}$. **29.** $-\frac{1}{3}$. **30.** $\frac{1}{20}$.

31. 2. **32.** -12. **33.** $-\frac{1}{8}$. **34.** $6\frac{2}{3}$. **35.** $-2\frac{1}{2}$.

36. -6. **37.** 2. **38.** 5. **39.** -5. **40.** $1\frac{3}{5}$. **41.** -5.

42. 1. **43.** 4. **44.** $\frac{7}{9}$. **45.** $2\frac{1}{2}$. **46.** $\frac{1}{2}$.

47. 2. **48.** $-\frac{5}{7}$. **49.** -3. **50.** 1. **51.** $\frac{1}{4}$.

52. 49. **53.** 5. **54.** 23. **55.** 8. **56.** 6.

57. 5. **58.** 49. **59.** 4. **60.** 25. **61.** 4.

62. 3. **63.** $-\frac{2}{3}$. **64.** 3. **65.** 10. **66.** 9.

67. 4. **68.** $-6\frac{3}{4}$. **69.** 16. **70.** 441. **71.** $14\frac{11}{25}$.

72. 100. **73.** 4. **74.** 2. **75.** 2. **76.** 4.

77. $2\frac{2}{3}$. **78.** 7. **79.** 2. **80.** $\frac{2}{3}$. **81.** $\frac{5}{2}$.

82. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **83.** $8\frac{2}{3}$. **84.** 2. **85.** $\frac{4}{3}$. **86.** 4.

87. $8\frac{1}{2}$. **88.** 60. **89.** $4\frac{1}{2}$. **90.** $\frac{1}{9}$. **91.** $\frac{9}{26}$. **92.** $-\frac{1}{4}$.

---

93. $\frac{a+b}{2}$. **94.** $\frac{(a-b)^2}{4}$. **95.** $\frac{m}{4}$. **96.** $\frac{a^2+m^2}{2(a+m)}$.

97. $\frac{(m-1)^2}{2m-1}$. **98.** $\frac{gt^2}{\pi^2}$. **99.** $a\frac{a^2m^2-1}{a^2m^2+1}$. **100.** $a-b$.

101. $\frac{16b-9a}{16}$. **102.** $\frac{2a^2b^2}{b^4+1}$. **103.** $\frac{a(m-1)^2}{m(2-m)}$. **104.** $\left(\frac{3ab}{a-b}\right)^2$.

105. $\frac{m}{a^2-1}$. **106.** $\frac{a^{12}-b^{12}m}{b^{12}}$. **107.** $\frac{bn}{2}$. **108.** $\frac{2b}{a(4ab^2-1)}$.

---

109. $-\frac{1}{4}$. **110.** $\frac{1}{3}$. **111.** 25. **112.** $\frac{3}{4}$. **113.** $\frac{1}{3}$. **114.** $\frac{1}{3}$.

115. 5. **116.** $\frac{a^2-b^2}{3a}$. **117.** $\frac{b}{2}$. **118.** $\frac{4(b^2-a^2)}{a}$.

119. $-\frac{3a}{8}$. **120.** $\frac{a-1}{b}$. **121.** $200\frac{1}{2}$. **122.** 4. **123.** 4.

124. $\frac{a}{a+2\sqrt{a}}$. **125.** $\frac{5a^2-b^2}{4a}$. **126.** $\frac{(3m+2)^2}{20}$. **127.** q.

128. $\frac{(a+2\sqrt{a})^2}{12a}$. **129.** $\frac{m+n-2\sqrt{mn}}{4}$. **130.** $ab(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4$.

131. $x=29$, $y=20$. **132.** $x=64$, $y=1$. **133.** $x=16$, $y=9$.

134. $x=49$, $y=4$. **135.** $x=12$, $y=15$. **136.** $x=6\frac{1}{4}$, $y=100$.

137. $x=2$, $y=6$. **138.** $x=3$, $y=2$. **139.** $x=10$, $y=9$.

140. $x = 0{,}16$
$y = 0{,}09.$

141. $x = \frac{1}{(a+b)^2}$
$y = \frac{1}{(a-b)^2}.$

142. $y = \frac{121}{16(2m+3n)^2}$
$z = \frac{121}{36(m-4n)^2}.$

143. $x = 0$
$y = \frac{a+1}{a^2+1}$
$z = \frac{a-1}{a^2+1}.$

144. $x = \frac{5m}{4}$
$y = \frac{4m}{5}.$

145. $x = \frac{4}{9}$; $y = 0.$

146. $x = \frac{am - 2(b^2+c^2)}{a+4c}$
$y = \frac{b^2+c^2+2cm}{a+4c}.$

147. $x = 17$; $y = 8.$

148. $x = 4$
$y = 4$
$z = 5.$

149. $x = 8$
$y = 9$
$z = 1.$

150. $x = 10$
$y = 20$
$z = 30.$

---

151. 144. **152.** 196. **153.** 324. **154.** $0^m{,}99384$. **155.** $9^m{,}8116$.

156. La longueur du pendule à seconde à Genève est de $0^m{,}99337$; sur le Righi elle est de $0^m{,}99310$; il faudrait donc raccourcir le pendule de $0^{mm}{,}27$.

157. Soient g la gravité au bord de la mer, h l'altitude cherchée, g' l'intensité de la gravité dans cette station, et R le rayon terrestre. Les distances respectives des deux lieux d'observation au centre de la terre sont R et $R+h$. Donc, d'après les lois de l'attraction : $\frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = 1 + \frac{2h}{R}$, et

$$g' = \frac{g}{1+\frac{2h}{R}} = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

La durée d'une oscillation dans la nouvelle station sera $\frac{86400}{86395}$. Donc $\frac{86400}{86395} = \pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1-\frac{2h}{R}\right)}}$. D'où : $h = 369^m{,}92$.

158. $39\frac{1}{10}$ kilg. **159.** 21,23. **160.** $0^{m},82$. **161.** 36 et 49.

XXXVIII

2. Équations exponentielles dont la résolution se ramène à celle d'une équation du premier degré.

1. $x = 3$. **2.** $x = -2$. **3.** $y = 1\frac{1}{3}$. **4.** $z = 2$.

5. $x = 4$. **6.** $x = -\frac{13}{8}$. **7.** $x = -4$. **8.** $x = -1\frac{1}{4}$.

9. $x = 7$. **10.** $x = -3\frac{1}{5}$. **11.** $y = -\frac{2}{7}$. **12.** $x = \frac{3}{5}$.

13. $x = 3\frac{3}{4}$. **14.** $x = -\frac{6}{7}$. **15.** $x = 3$. **16.** $z = 11$.

17. $x = 7$. **18.** $x = 4\frac{1}{2}$. **19.** $x = 2$. **20.** $x = -\frac{1}{4}$.

21. $x = -4$. **22.** $x = -\frac{4}{5}$. **23.** $y = -6$. **24.** $x = -3$.

25. $z = 1$. **26.** $x = 2$. **27.** $x = 4$. **28.** $x = 5$.

29. $y = 6$. **30.** $x = 3$. **31.** $x = -3$. **32.** $x = -3$.

33. $z = 7$. **34.** $x = -4$. **35.** $x = 4$. **36.** 5.

37. 3. **38.** $x = 5$. **39.** $z = 5$. **40.** $x = -\frac{3}{4}$.

41. $x = -8$. **42.** $x = -9$. **43.** $x = \frac{3}{2}$. **44.** $x = \frac{1}{2}$.

45. $x = \frac{2}{3}$. **46.** $x = \frac{5}{3}$. **47.** $x = -3$. **48.** $x = 0$.

49. $x = \frac{2}{3}$. **50.** $x = 2\frac{1}{3}$. **51.** $x = -2$. **52.** $x = -1$.

53. $x = -6$. **54.** $x = 2\frac{1}{3}$.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

I. ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE INCONNUE

XXXIX

1. Équations incomplètes.

1. 7[1]. **2.** 5. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{5}{6}$. **5.** $2\frac{1}{2}$. **6.** 4. **7.** 3.
8. 3. **9.** 2. **10.** $2\frac{1}{2}$. **11.** 2. **12.** 3. **13.** 9. **14.** 3.
15. $\frac{6}{25}$. **16.** 4. **17.** 3. **18.** 3. **19.** 2.
20. $\frac{\sqrt{85}}{2} = 4{,}609\,7$. **21.** 5. **22.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **23.** $\frac{2\sqrt{10}}{5} = 1{,}264$.
24. 9. **25.** 4. **26.** $\frac{12}{5}\sqrt{-1}$. **27.** 6. **28.** $\frac{2}{3}$. **29.** 9.
30. 3. **31.** $2\sqrt{-1}$. **32.** $\sqrt{3}$; 0. **33.** $\pm 2\sqrt{-3}$; 0.
34. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **35.** 3.

---

2. Équations complètes.

XL

Equations de la forme $x^2 + px + q = 0$.

1. 2 ou -6. **2.** 5; $-5{,}6$. **3.** 3. **4.** 7; 1.

(1) Quand les racines sont égales et de signes contraires, nous avons supprimé le signe $\pm$ dans les réponses. On voudra bien le sous-entendre.

5. 11 ; — 17.	**6.** 10 ; — 6.	**7.** 4 ; — 14.	**8.** 2 ; — 8.
9. 8 ; — 6.	**10.** 6 ; — 14.	**11.** 9 ; — 19.	**12.** 4 ; 3.
13. 7 ; — 2.	**14.** 12 ; — 5.	**15.** 20 ; — 19.	**16.** 5 ; — 2.
17. 30 ; — 21.	**18.** 25 ; — 10.	**19.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{2}$.	**20.** 3 ; 2.
21. $14\frac{2}{3}$; $\frac{1}{8}$.	**22.** 4 ; — 6.	**23.** 4 ; 24.	**24.** 14 ; — 1.
25. 12 ; — 1.	**26.** 6 ; — 10.	**27.** $\frac{11}{2}$; — 4.	**28.** 4 ; 1.
29. 6 ; 2.	**30.** 7 ; 3.	**31.** 4 ; — 25.	**32.** 196 ; 49.

Equations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

33. 1 ; $-\frac{2}{5}$.	**34.** 3 ; $-4\frac{2}{3}$.	**35.** $\frac{1}{3}$; — 2.	**36.** $\frac{6}{5}$; $\frac{1}{5}$.
37. 10 ; $-\frac{5}{3}$.	**38.** 2 ; $-\frac{5}{7}$.	**39.** 3 ; $-\frac{2}{3}$.	**40.** 5 ; $\frac{3}{2}$.
41. 4 ; $-\frac{5}{2}$.	**42.** 1 ; $\frac{2}{3}$.	**43.** $\frac{3}{5}$; $-\frac{33}{80}$.	**44.** $\frac{2}{7}$; $-\frac{5}{7}$.
45. $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{10}$.	**46.** $\frac{5}{6}$; $-\frac{14}{15}$.	**47.** 2 ; $-\frac{1}{9}$.	**48.** 2 ; — 3.
49. 5 ; $\frac{2}{3}$.	**50.** 5 ; $-\frac{10}{3}$.	**51.** $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$.	**52.** 5 ; $-2\frac{1}{2}$.
53. $\frac{7}{8}$; $-\frac{33}{8}$.	**54.** 2 ; $\frac{3}{5}$.	**55.** 6 ; $-\frac{1}{2}$.	**56.** 9 ; 2.
57. 11 ; $\frac{7}{2}$.	**58.** 1 ; $-\frac{1}{16}$.	**59.** $1\frac{8}{15}$; $\frac{2}{3}$.	**60.** 2 ; $\frac{1}{2}$.
61. 5 ; — 2.	**62.** $6\frac{9}{16}$; 6.	**63.** 7 ; 0.	**64.** 2 ; $-\frac{61}{90}$.

Equations de la forme $ax^2 + 2bx + c = 0$.

65. $\frac{3}{2}$; $-\frac{15}{2}$.	**66.** $\frac{4}{5}$; $3\frac{1}{5}$.	**67.** $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$.	**68.** $\frac{2}{3}$; — 2.

69. $1;\ \frac{3}{5}$. **70.** $-2;\ \frac{24}{5}$. **71.** $\frac{4}{5};\ -\frac{4}{3}$. **72.** $\frac{2}{5};\ 0$.

73. $4;\ -3\frac{1}{3}$. **74.** $3;\ -4\frac{5}{7}$. **75.** $2;\ -\frac{3}{5}$. **76.** $\frac{1}{5};\ -\frac{1}{7}$.

77. $\frac{19}{30};\ 0{,}3$. **78.** $0{,}5;\ 0{,}1$. **79.** $5;\ -7$. **80.** $7;\ 1$.

81. $13;\ -\frac{13}{3}$. **82.** $2;\ 40$. **83.** $6;\ \frac{14}{5}$. **84.** $5;\ \frac{5}{3}$.

85. $2;\ -\frac{10}{11}$. **86.** $9;\ 1$. **87.** $4;\ \frac{8}{9}$. **88.** $3;\ -\frac{11}{3}$.

89. $5;\ 1$. **90.** $\frac{1}{2};\ -\frac{9}{10}$. **91.** $\pm\sqrt{3}$. **92.** $9;\ 675$.

---

93. $3;\ -1\frac{1}{2}$. **94.** $5;\ -2\frac{6}{7}$. **95.** $6;\ \frac{9}{10}$. **96.** $\frac{1}{4};\ -\frac{11}{16}$.

97. $\frac{2}{3};\ \frac{11}{24}$. **98.** $0{,}7;\ 1{,}1$. **99.** $5\frac{2}{5};\ -7\frac{1}{5}$. **100.** $0{,}9;\ 0{,}1$.

101. $\frac{3}{5};\ \frac{273}{380}$. **102.** $\frac{7}{10};\ 5\frac{11}{30}$. **103.** $\frac{2}{3};\ -\frac{52}{165}$. **104.** $\frac{2}{3};\ -\frac{13}{30}$.

105. $6;\ \frac{1}{2}$. **106.** $7;\ -\frac{1}{13}$. **107.** $3,\ \frac{15}{11}$. **108.** $4;\ -9$.

109. $0{,}9;\ -\frac{1}{1300}$. **110.** $1{,}2;\ \frac{1}{7}$. **111.** $2{,}3;\ -\frac{49}{30}$. **112.** $3{,}1;\ 0{,}6$.

113. $1\frac{1}{2};\ -\frac{5}{6}$. **114.** $4;\ -2\frac{1}{2}$. **115.** $5;\ 2\frac{1}{12}$. **116.** $10;\ -0{,}7$.

117. $14;\ 5\frac{1}{19}$. **118.** $20;\ -1\frac{1}{3}$. **119.** $18;\ 15{,}8$. **120.** $11\frac{1}{2};\ 11$.

121. $16;\ -\frac{41}{105}$. **122.** $22;\ 5\frac{4}{7}$. **123.** $30;\ 305$. **124.** $15\frac{1}{2};\ 32$.

125. $40;\ 22\frac{23}{41}$. **126.** $38;\ -30$. **127.** $60;\ 15\frac{25}{139}$. **128.** $84;\ 55\frac{41}{61}$.

129. $96;\ 70\frac{47}{88}$. **130.** $621\frac{12}{13};\ 48$. **131.** $100;\ 126\frac{112198}{177477}$.

---

132. $3;\ -\frac{1}{2}$. **133.** $5;\ 1\frac{1}{3}$. **134.** $4;\ 1\frac{3}{4}$. **135.** $2;\ 17\frac{3}{5}$.

136. $3; -\frac{1}{2}$. **137.** $3; \frac{21}{11}$. **138.** $7; -\frac{7}{9}$. **139.** $3; 1\frac{11}{13}$.

140. $6; \frac{21}{23}$. **141.** $5; -12$. **142.** 2. **143.** $4\frac{1}{2}; 1$.

144. $5; 1\frac{1}{2}$. **145.** $5; -\frac{1}{3}$. **146.** $1; 0{,}5$. **147.** $8; 1$.

148. $7; -1$. **149.** $4; -2$. **150.** $12; 11$. **151.** $3\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

152. $2\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$. **153.** $\frac{2}{3}; -\frac{13}{21}$. **154.** $6; -\frac{1}{3}$. **155.** $11; 1$.

156. $17; 6$. **157.** $6; -17$. **158.** $2; -1$. **159.** $5; 4$.

160. $7; -\frac{11}{3}$. **161.** $1; -1\frac{1}{4}$. **162.** $4; -5$. **163.** $13; \frac{1}{2}$.

164. $7; 4\frac{5}{9}$. **165.** $8; -8\frac{3}{4}$. **166.** $15; \frac{983}{1647}$. **167.** $\frac{2}{3}; -3$.

168. $5; 1\frac{1}{5}$. **169.** $8; -1$. **170.** $5; -1\frac{1}{4}$. **171.** $-7; -11$.

172. $-11; -13$. **173.** $7; 3\frac{14}{15}$. **174.** $0; -\frac{3}{2}$. **175.** $0; -\frac{5}{2}$.

176. $0; -\frac{243}{193}$. **177.** $0; 1$. **178.** $0; \frac{4}{7}$. **179.** $11; -9\frac{8}{19}$.

180. $13; -7\frac{4}{7}$. **181.** $3; -56$. **182.** $4; -1\frac{17}{168}$. **183.** $9; -5\frac{1}{2}$.

184. $3; -15\frac{4}{7}$. **185.** $2; -\frac{7}{9}$. **186.** 4. **187.** $0; -2$. **188.** $2; \frac{1}{4}$.

---

189. $6; -1$. **190.** $4; -1$. **191.** $0; 3$. **192.** $7; 0$.

193. $5; 1\frac{3}{4}$. **194.** $7; 5$. **195.** $3\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$. **196.** $\pm\frac{3}{5}$.

197. $2; -\frac{1}{3}$. **198.** $1; -\frac{1}{3}$. **199.** $3; \frac{1}{3}$. **200.** $7; 5\frac{2}{7}$.

201. $-2; -3\frac{9}{11}$. **202.** $9; -9\frac{2}{27}$. **203.** $7; 4$. **204.** $1; \frac{1}{21}$ (*).

(*) La seconde solution ne convient pas à l'équation proposée, mais à celle-ci : $-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5\sqrt{x}$. La seconde solution du suivant convient de même à l'équation : $-\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$.

205. $4;\ -12{,}6.$ **206.** $13;\ 193.$ **207.** $4;\ -3\tfrac{1}{5}.$ **208.** $8;\ 4\tfrac{4}{17}.$

209. $4;\ -\frac{4}{7}.$ **210.** $\frac{1}{2};\ -4\tfrac{1}{6}.$ **211.** $\frac{5}{4};\ 55\tfrac{1}{4}.$ **212.** $4;\ -\frac{8}{9}.$

213. $-4;\ -7.$ **214.** $3;\ \frac{9}{10}.$ **215.** $2;\ -16\tfrac{1}{2}.$ **216.** $1;\ -\frac{11}{24}.$

217. $3;\ -3\tfrac{5}{7}.$ **218.** $7;\ -6.$ **219.** $\frac{1}{2};\ -\frac{5}{7}.$ **220.** $\frac{2}{3};\ -\frac{11}{42}.$

221. $1;\ -\frac{1}{3}.$ **222.** $3;\ -\frac{39}{46}.$ **223.** $5;\ -4\tfrac{11}{13}.$ **224.** $3;\ -\frac{2}{3}.$

225. $\pm 2.$ **226.** $\pm\frac{1}{2}.$ **227.** $\frac{9}{5};\ \frac{1}{5}.$ **228.** $4;\ \frac{1}{2}.$

229. $5;\ -40\tfrac{5}{6}.$ **230.** $3;\ 1\tfrac{175}{261}.$ **231.** $\pm 2.$ **232.** $\pm\frac{2}{3}.$

233. $4;\ -\frac{1}{4}.$ **234.** $2;\ -\frac{17}{22}.$ **235.** $6;\ 0.$ **236.** $5;\ -\frac{60}{139}.$

237. $2;\ -34.$ **238.** $3;\ -1\tfrac{4}{63}.$ **239.** $4.$ **240.** $1;\ -2.$

241. $3;\ \frac{4}{5}.$ **242.** $\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}.$ **243.** $\frac{7}{2};\ -1.$ **244.** $\pm 5.$

---

245. $3^{(x+2)(x-3)} = 3^0$; d'où $x^2 - x - 6 = 0$, et $x = 3;\ -2.$

246. $8^{x^2+2x} = 8^3$; $x = 1;\ -3.$ **247.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}.$

248. $96;\ -7\tfrac{20}{103}.$ **249.** $59;\ -53\tfrac{192}{263}.$ **250.** $2387;\ -2392\tfrac{3026}{4353}.$

251. $2\,487;\ -2\,297\tfrac{1260}{4253}.$ **252.** $56\,789;\ -12\,345.$

Cas où a est très petit.

253. $-666\,666{,}166\,666\,291$
$-0{,}500\,000\,375.$

254. $-39\,999{,}249\,985\,934$
$-0{,}750\,014\,065.$

255. $-83\,332{,}933\,331\,413$
$-0{,}400\,001\,920.$

256. $61\,739{,}749\,998\,989$
$0{,}250\,001\,011.$

257. $1\,142\,857{,}267\,857\,129$
$-0{,}124\,999\,986.$

II. ÉQUATIONS LITTÉRALES A UNE INCONNUE.

XLI

1. Equations incomplètes.

1. $\pm 2b$. **2.** $\pm (1 + a)$. **3.** $\sqrt{\frac{b}{a}}$. **4.** $a - b$.

5. $\sqrt{a^2 + b^2}$. **6.** $\sqrt{a}$. **7.** $\sqrt{a + 1}$. **8.** $\sqrt{(a^2 + 1)(a - 1)}$.

9. $\sqrt{\frac{n + p}{m}}$. **10.** $\sqrt{(a^2 + b^2)(a - b)}$. **11.** $\frac{b}{\sqrt{a + c}}$.

12. $\sqrt{a^2 - b^2}$. **13.** $\sqrt{\frac{cn}{mp}}$. **14.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{ac}}$. **15.** $\sqrt{-mp}$.

16. $\sqrt{\frac{bc - ad}{a + d - b - c}}$. **17.** $m - n - a$. **18.** $\sqrt{\frac{b}{m - b}}$.

19. $\sqrt{a.\frac{m + n}{m - n}}$. **20.** $(m + n)\sqrt{-1}$. **21.** $b\sqrt{a^2 - 2}$.

22. $b\sqrt{a^2 - b^2}$. **23.** $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. **24.** $\frac{bnp}{o}\sqrt{\frac{2}{n^2 + p^2}}$.

25. $\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$. **26.** $\frac{r}{p}\sqrt{\frac{a^2n^2p^2 + b^2m^2p^2 - c^2m^2n^2}{m^2r^2 + n^2r^2 - m^2n^2}}$.

27. $a\sqrt{-1}$. **28.** $\pm 2m$. **29.** $\sqrt{-pn}$. **30.** $\pm b$.

31. $\sqrt{\frac{11a^2}{2} - 3ab + b^2}$.

32. $\sqrt{(a + b)^2 + (3a)^2}$; ou : $\sqrt{10a^2 + 2ab + b^2}$.

33. $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$. **34.** $a\sqrt{a - 1}$. **35.** $\pm (a + b)$.

36. $\sqrt{2ab - b^2}$. **37.** $\sqrt{(2a - 3b)^2 + 36b^2}$. **38.** $\pm 2m\sqrt{1 - m}$.

39. $a\sqrt{-1}$. **40.** $b\sqrt{\frac{3a^4 + b^4}{a^4 + 3b^4}}$. **41.** $\pm \frac{2a}{\sqrt{1 + a}}$. **42.** $\pm \frac{1}{2}$.

XLII

2. Equations complètes.

Equations de la forme $x^2 + px + q = 0$.

1. $-\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$ **2.** $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$

3. $-\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}.$ **4.** $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}.$

5. $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}.$ **6.** $-\frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 - 4n}).$

7. $\frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 + 4g}).$ **8.** $\frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4c}).$

9. $4p; -p.$ **10.** $2b; -b.$ **11.** $-\frac{d}{2} \pm 2h^2.$

12. $\frac{3}{2a}; -\frac{1}{2a}.$ **13.** $\frac{1}{2m}(1 \pm 2\sqrt{-1}).$ **14.** $\frac{c}{2} \pm d\sqrt{-1}.$

15. $-m; -n.$ **16.** $n; p.$ **17.** $\frac{m}{n}; \frac{n}{m}.$ **18.** $\frac{3n}{4}; -2\tfrac{1}{4}n.$

19. $c; 2.$ **20.** $a; -\frac{a}{2}.$ **21.** $\frac{2m}{3}; -m.$ **22.** $\frac{p}{2}; \frac{p}{10}.$

23. $\frac{3b}{2}; \frac{b}{6}.$ **24.** $\frac{3(a+b)}{2}; -\frac{a+b}{2}.$ **25.** $m; -n.$

26. $a; -b.$ **27.** $m + n; 2n.$ **28.** $-a; -b.$

29. $\frac{1}{2(2a-b)}\left\{5ab - 2b^2 \pm b\sqrt{(2b-5a)^2 - 4(2a-b)}\right\}.$

30. $c \pm \sqrt{c^2 + ab - bc - ac}.$

31. $-\frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{-\frac{n+2m}{n-2m}}\right).$ **32.** $\frac{a}{2}; -\frac{5a}{6}.$

33. $-b; -a.$ **34.** $\frac{1}{2}(3a - b \pm \sqrt{9a^2 - 10ab + b^2}).$

35. $\frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4b^2})$. **36.** $-\frac{2a + 2b - 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4b}$.

37. $6a^2$; $-a^2$. **38.** Posez $\sqrt{x} = y$; $x = (2a)^2$; ou: $(b - a)^2$.

39. $(2c - d)^2$; $(2d - c)^2$.

40. $-\frac{m - n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m + n)^2 + 4mn}$.

Equations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

41. $-\frac{1}{2m}(n \pm \sqrt{n^2 + 4mp})$. **42.** $\frac{1}{2m}(n \pm \sqrt{n^2 + 4mp})$.

43. $-\frac{1}{6}(a \pm \sqrt{a^2 + 12b})$. **44.** $2a$; $-\frac{a}{2}$.

45. $\frac{1}{2b}(a \pm \sqrt{a^2 - 4bp})$. **46.** 1; $-\frac{5a + c}{c}$. **47.** $-\frac{a}{2}$; $-\frac{9a}{2}$.

48. $\frac{a}{2}$; $\frac{b}{2}$. **49.** $2p$; $\frac{p}{2}$. **50.** $\frac{ab}{2a - b}$; $2b$.

51. $4a - 3b$; $3b - a$. **52.** $\frac{a + 3b}{2}$; $-\frac{3a + b}{2}$. **53.** $\frac{3p}{4}$; $-p$.

54. $\frac{b}{a}$; $-\frac{d}{c}$. **55.** $\frac{2a - b}{ac}$; $-\frac{3a + 2b}{bc}$. **56.** $\frac{a}{a - b}$; $\frac{b}{a - b}$.

57. $\frac{1}{ab^2}$; $\frac{1}{a^2b}$. **58.** $\frac{2a + b}{2}$; 0. **59.** $-\frac{3a}{2}$; $-4a$.

60. $\frac{a + b + 2ab}{2}$; $\frac{a + b - 2ab}{2}$.

61. $\frac{2a^2 - bc + 2d^2}{2(a + d)}$; $-\frac{bc}{2(a + d)}$. **62.** $\frac{b}{a}$; -1.

63. $\frac{1}{2}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$. **64.** $\frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1 + 4b^2})$.

65. $\frac{1}{6}(a \pm \sqrt{a^2 + 24ab})$. **66.** $\frac{3a}{2} \pm \frac{a}{6}\sqrt{165}$. **67.** $\frac{4a}{3}$; $\frac{a}{3}$.

Equations de la forme $ax^2 + 2bx + c = 0$.

68. $\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 + ac}$. **69.** $-\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$.

70. $\frac{2q}{p} \pm \frac{1}{p}\sqrt{4q^2 + mp}$. **71.** $-2 \pm \frac{1}{m}\sqrt{4m^2 - cm}$.

72. $\frac{8+a}{c}; -\frac{a}{c}$. **73.** $5a; \frac{7a}{3}$. **74.** $\frac{7ab}{3}; \frac{3ab}{5}$.

75. $ab \pm a\sqrt{b^2 - b}$. **76.** $\frac{2m}{3}; -\frac{2n}{3}$.

77. $\frac{a+b-ab}{b+1}; -\frac{a+b+ab}{b+1}$. **78.** $-\frac{a-b}{3}; -(a-b)$.

79. $a+b; 3b-a$. **80.** $\frac{b^2}{ac}$. **81.** $a+2b; a-2b$.

82. $1 + 3a \pm (2a-1)\sqrt{a}$. **83.** $a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4}$.

84. $-c \pm \sqrt{c^2 + ab - bc - ac}$. **85.** $\frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{3})$.

86. $-\frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{3})$. **87.** $2a \pm \frac{a}{3}\sqrt{-3}$. **88.** $\frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{3})$.

89. $-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4 + 3a}$. **90.** $\frac{2a}{3}; 0$. **91.** $-\frac{b+2a}{ab} \pm \frac{3}{ab}\sqrt{ab}$.

92. $-\frac{4(a-1)}{6+a} \pm \frac{\sqrt{6(7a^2 - 6a + 6)}}{3(6+a)}$. **93.** $\frac{a}{4}(1 \pm \sqrt{7})$.

94. $2a; -\frac{2a}{3}$. **95.** $4a; -2a$. **96.** $\frac{a}{3}; -\frac{a+2b}{3}$.

97. $\frac{m(1 \pm \sqrt{a})^2}{a+1}$. **98.** $\frac{a(2 \pm \sqrt{2})}{2}$. **99.** $\pm \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

100. $\frac{b^2}{2a^2}(2 \pm \sqrt{3})$. **101.** $b \pm \sqrt{b^2 - ab}$.

Les équations suivantes se rapportent tantôt à l'une, tantôt à l'autre des formes ci-dessus.

102. $\frac{ab}{c}; -\frac{c^3}{ab}$. **103.** $\frac{a}{b}; -\frac{b}{a}$. **104.** $3a - 2b; 2a + 3b$.

105. $2b + a$; $2b - a$. **106.** $a + 2c$; $b - c$.

107. $a + b - 2c$; $b + 2c$. **108.** $a^2 + b^2$; $2ab$.

109. $\frac{3b}{c}$; $-\frac{5d}{a}$. **110.** $\frac{a^3b}{c^4}$; $-\frac{b^2c^3}{a^5}$. **111.** $\frac{2n^4}{m^6p^2}$; $-\frac{2n^2}{m^3p^5}$.

112. $\frac{2c^3}{a^2b}$; $-\frac{2b^3d^7}{a^5c^2}$. **113.** $a^2 - b^2$; $a + b$.

114. $\frac{3}{2}(a - m)^2 \pm \frac{3}{2}(a^2 + m^2)$. **115.** $4a + 3b$; $3a - 4b$.

116. $4a + 5b$; $2a - 3b$.

---

117. $\frac{b^{-1}}{a^{-2}c^{-1}}$; $\frac{b^{-3}d^{-1}}{a^{-3}c^{-1}}$. **118.** $\frac{3a^{-1}c^{-3}}{b^{-4}}$; $-\frac{5a^{-2}c}{b^{-2}}$.

119. $\frac{2a^{-1}b^{-1}}{d^{-3}}$; $-\frac{4a^{-4}c^{-1}d^{-1}}{b^{-2}}$.

120. $\frac{6a^{-1}c^{-2} + c^{-3}d - 8a^{-2}}{2a^{-2}b}$; $\frac{c^{-3}d}{2a^{-2}b}$. **121.** $\frac{4a^{-2}q^{-1}}{p^{-2}}$; $-2a^{-1}$.

122. $\frac{10a^{-p}b}{a^{-m}}$; $\frac{6b^{-n}c^{-4}}{a^{-m}}$. **123.** $4n^{-2p} - a^{-1}$; $-a^{-1}$.

124. $\frac{2b^{-2}}{b^{-4} - c^{-2}}$; $-\frac{6a - 2b^{-2}}{b^{-4} - c^{-2}}$. **125.** $\frac{c^4 + b^{-1}}{2b^{-1}c^4}$; $-\frac{3c^4 - b^{-1}}{2b^{-1}c^4}$.

126. $\frac{2b^{-2m} - a^{-6}}{2a^{-1}b^{-m}d^{-p}}$; $-\frac{a^{-5}}{2b^{-m}d^{-p}}$. **127.** $\frac{2n^{-(p+r)} + b^{-2}m^{-a}}{2m^{-a}n^{-r}}$; $\frac{b^{-2}}{2n^{-r}}$.

128. $\frac{b^{-(n+2)} + 3a^{-(m+3)}}{a^{-m}b^{-2}}$; $\frac{b^{-(n+2)} + a^{-(m+3)}}{a^{-m}b^{-2}}$.

---

129. a; b. **130.** $\pm(m - n)$. **131.** $\sqrt{a^2 - b^2}$.

132. $\pm\sqrt{(b - c)^2 - a^2}$. **133.** ± 1. **134.** ± 1.

135. $\frac{m + n + p}{\sqrt{2(mn + mp + np)}}$. **136.** $a + ad \pm 2\sqrt{ad}$.

137. $x = \frac{p^2 + r^2}{2} \pm \sqrt{\frac{p^4 + r^4 + 2p^2r^2 - 4(p^2 - r^2)pr}{4}}$

$= \frac{p^2 + r^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 - r^2)^2 + 4p^2r^2 - 4(p^2 - r^2)pr}{4}}$

$= \frac{p^2 + r^2}{2} \pm \frac{p^2 - 2pr - r^2}{2} = p(p - r);\ r(p + r).$

138(1). $2m(2m - n);\ n(2m + n).$

139. $2m(n + 2m);\ n(n - 2m).$ **140.** $\sqrt{-mp}.$ **141.** $\sqrt{mp}.$

142. $\frac{2ab - ac - bc}{a + b - 2c};\ 0.$ **143.** $c;\ -\frac{d(c + d)}{2c + d}.$ **144.** $2p;\ 0.$

145. $\sqrt{a^2 - b^2}.$ **146.** $\sqrt{a^2 + 12b^2}.$ **147.** $-\frac{11a}{6} \pm \frac{a}{6}\sqrt{13}.$

148. $0;\ 13a - 4b + d.$ **149.** $-\frac{3c}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{9c^2 + 8bc - 16b^2}.$

150. $0;\ \frac{bp - cn}{ap - cm}.$ **151.** $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b(a - c)}.$

152. $a - b;\ -a.$

153. $\frac{5(3a - b) \pm \sqrt{25(9a^2 + b^2) - 198ab}}{6},$

$\frac{5(3a - b) \pm \sqrt{225a^2 + 73b^2 - 222ab}}{6}.$

154. $\frac{3a + c \pm \sqrt{11a^2 + c^2 + 42ac + 10ab}}{2}.$ **155.** $3b;\ -\frac{b}{2}.$

156. $\frac{7a}{4};\ -\frac{a}{4}.$ **157.** $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 25a}}{5}.$ **158.** $a(1 \pm 3\sqrt{2}).$

159. $a;\ b;\ -\frac{2a}{7}.$ **160.** $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4b}}{2}.$ **161.** $2p^2;\ -\frac{p}{2}.$

---

(1) $\frac{4m^2 + n^2}{2} \pm \sqrt{\frac{16m^4 + n^4 + 8m^2n^2 - 8mn(4m^2 - n^2)}{4}}$

$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(16m^4 + n^4 - 8m^2n^2) + 16m^2n^2 - 8mn(4m^2 - n^2)}$

$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\{(4m^2 - n^2) - 4mn\}^2}$

162(1). $\pm\sqrt{n}$. **163.** $\pm 2b$. **164.** $\pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2-1}}$.

165. $\frac{(p+m)^2}{4}(1\pm\sqrt{2})$. **166.** $0; \frac{9a}{16}$. **167.** $\pm a\sqrt{\frac{a}{a-1}}$.

168. $\pm\frac{b}{\sqrt{1-4a^2}}$. **169.** $\pm\sqrt{\frac{4a^2(a-b)}{4a^2-(a-b)^2}}$.

170. $\frac{a}{2b^2}; -\frac{9a}{2b^2}$. **171.** $0; a$. **172.** $\pm\sqrt{ab}$.

173. $\frac{2a}{a+b}i\sqrt{ab}$. **174.** $\frac{a}{1+\sqrt[3]{a^2}}$. **175.** $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{4}\sqrt{2}$.

176. $\pm\sqrt{a^2+b^2}$. **177.** $\pm\sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

178. $\frac{a}{b}; \frac{c+d}{m+n}$. **179.** $\frac{4a-b}{3}; \frac{4b-a}{3}$. **180.** $\frac{a+b}{2}$.

181. $\frac{3a}{32}(3\pm\sqrt{21})$.

XLIII

3. Exercices sur quelques procédés particuliers de calcul.

1. 5; 3. **2.** 7; -1. **3.** 3; -3. **4.** 4; -9. **5.** $a; b$.

6. $a-3; -(b-a)$. **7.** $\frac{a-2}{2}; -\frac{b-m}{3}$.

8. 13 est évidemment une racine; 5 l'autre.

9. On voit que 6 est une racine; les autres sont $3\pm\sqrt{-2}$.

10. On voit que 7 est une racine; les autres sont $1\pm\sqrt{-11}$.

11. 7; -5. **12.** $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}$. **13.** $ab; -3a$. **14.** $4b^2; -3a^2$.

15. $\frac{3a}{2}; 2a^2$.

(1) Il faut, dans le problème, sous le radical, x^2 au lieu de x.

16. a est évidemment une racine; l'autre est $\frac{m+2n}{2}$ donnée par l'équation $m - x = x - 2n$. 17. $3; -3$.

18. 0 est évidemment une racine; les autres sont $\pm\sqrt{ab}$.

19. On voit que l'une des racines est a et l'autre b.

20. On voit que a est une racine; l'autre est $\frac{4a-b}{3}$.

21. On écrit: $\left(\frac{x}{m} + \frac{x+a}{p}\right)\left(\frac{2x}{3m} - \frac{x+b}{2r}\right) = 0$. On doit avoir séparément $\frac{x}{m} + \frac{x+a}{p} = 0$, et $\frac{2x}{3m} - \frac{x+b}{2r} = 0$; d'où $x = \frac{3bm}{4r-3m}$, ou $-\frac{am}{p+m}$.

22. Ecrivez: $\left(\frac{a}{1-x} + \frac{b}{x-a}\right)\left(\frac{x}{1+x} - \frac{2a}{b}\right) = 0$; d'où, égalant les deux facteurs à zéro, $x = \frac{a^2-b}{a-b}$, ou $\frac{2a}{b-2a}$.

---

23. $\frac{m+9a}{3}$; $3a - m$. 24. $\frac{5p-3b}{3}$; $\frac{p-3b}{3}$.

25. $3(x-a)^2 - 8(x-a) = 28$; d'où $x = \frac{14+3a}{3}$; $a - 2$.

26. $5 - a$; $-(a+1)$. 27. $49 - 2a$; $1 - 2a$. 28. a^2; $25a^2$.

29. $\frac{a(b-2)}{2b}$; $\frac{ab+2a-6}{2b}$. 30. $-5a^4$; $\frac{2a^2(2a^2-7b)}{9}$.

31. $\frac{c}{a-9b^2}$; $\frac{9c}{9a-b^2}$. 32. $\frac{43a^2}{9}$; $\frac{19a^2}{9}$.

33. Posez $\sqrt[3]{x^2} = y$; $x = \pm 8$, ou $\pm\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}$.

---

34. a; b; c. 35. $-a^2$; a^3; $-\frac{a}{3}$. 36. 2; -2.

37. 1 ; $a + b - 1$. **38.** $\pm 2a$ sont évidemment les deux racines.

39. Les racines sont évidemment a et b.

40. On voit que p et $2m$ sont les racines.

41. $\frac{a-b}{2} \pm \frac{a+b}{2c}\sqrt{c^2-4}$.

42. $x^2 + 9 - 6x = \frac{4}{x}$, ou $x(x-3)^2 = 4$; évidemment $x = 1$ satisfait à l'équation. Divisant par $x - 1$, on obtient $x^2 - 5x + 4$, qui, égalé à 0, donne les racines 4 et 1.

43. $\frac{a-b}{2} \pm \frac{(a+b)c}{2\sqrt{c^2+4}}$.

44. On peut écrire :

$$3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}\right) = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) = 3\left\{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3}\right\};$$

posant $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = y$, l'équation devient: $3\left(y^2 + \frac{8}{3}\right) = 10y$; d'où $y = 2$, ou $\frac{4}{3}$, ce qui donne pour x :

$$x = 6; -2; 3 \pm \sqrt{21}.$$

45. $\frac{a+b}{2} \pm \frac{(a-b)c}{2\sqrt{c^2-4}}$. **46.** $\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2c}\sqrt{c^2+4}$.

47. Ecrivez l'équation ainsi :

$$\frac{x^2}{8a} + \left(\frac{2x}{3} + \frac{a}{2}\right) - \sqrt{\frac{x^3}{3a} + \frac{x^2}{4}} = 0.$$

Le premier membre est le carré de $\frac{x}{2\sqrt{2a}} - \sqrt{\frac{2x}{3} + \frac{a}{2}}$.

Donc : $\left\{\frac{x}{2\sqrt{2a}} - \sqrt{\frac{2x}{3} + \frac{a}{2}}\right\}^2 = 0$; d'où $x = 6a$, ou $-\frac{2a}{3}$.

48. On voit qu'une des racines est $2m$. Les autres sont :

$$\frac{b - 2mc^2 \pm \sqrt{4m(mc^4 - bc^2 + 4bm) + b^2}}{4m}.$$

49. Multipliez de la manière suivante :

$(x+a)(x+4a) \times (x+2a)(x+3a) = c^4$

$(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=c^4$. Posez $x^2+5ax=ya^2$; il

viendra : $(y+4)(y+6)=\frac{c^4}{a^4}$; d'où $y=-5\pm\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4+c^4}$,

et $x=-\frac{5a}{2}\pm\sqrt{\frac{5a^2}{4}\pm\sqrt{a^4+c^4}}$.

50. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}$

$\frac{x-6}{x+6}\left\{\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right\}=\frac{x+6}{x-6}\left\{1-\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2\right\}$; ou :

$\frac{x-6}{x+6}\cdot\frac{36x}{(x-9)^2}=\frac{x+6}{x-6}\cdot\frac{16x}{(x+4)^2}$. Equation satisfaite pour $x=0$. Elle donne : $\left(\frac{x-6}{x+6}\right)^2=\frac{4}{9}\left(\frac{x-9}{x+4}\right)^2$; ou :

$\frac{x-6}{x+6}=\pm\frac{2}{3}\cdot\frac{x-9}{x+4}$; d'où $x=\pm 6\sqrt{-1}$; $\frac{6(1\pm\sqrt{26})}{5}$.

III. ÉQUATIONS DE DEGRÉS SUPÉRIEURS QUI SE RAMÈNENT AU SECOND DEGRÉ

XLIV

1. Équations bicarrées et trinomes.

1. ± 1; $\pm\sqrt{-5}$. **2.** ± 3; $\pm\sqrt{-1}$.

3. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{2}\sqrt{-22}$. **4.** $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

5. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{19}$; $\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$. **6.** $\pm\sqrt{5}$; $\pm\frac{1}{3}\sqrt{-3}$.

7(1). 2; $-\sqrt[3]{12}$; $-1\pm\sqrt{-3}$; $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

8. 3; $\sqrt[5]{-231}$. **9.** $\sqrt[m]{2a}$; $\sqrt[m]{-4a}$. **10.** $\pm\sqrt{-1}$; $\pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

11. $\pm\sqrt{\frac{a}{3b}}$; $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$. **12.** $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{11}$. **13.** 8; $4\sqrt[5]{-4}$.

(1) Le polynome $x^6+4x^3-96=(x-2)(x^3+12)(x^2+2x+4)=(x-2)(x+\sqrt[3]{12})(x^2-x\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{12^2})(x^2+2x+4)$.

14. $\pm 1; \pm\sqrt{127}$. **15.** $\pm\sqrt{106}; \pm\sqrt{10}$.

16. $4; -9; \frac{-5 \pm \sqrt{221}}{2}$. **17.** $12; -3; \frac{9 \pm 3\sqrt{21}}{2}$.

18. $5; -3; -5; 7$. **19.** $3; -\frac{9}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{-55}}{4}$.

20. $\pm 1; \pm \frac{\sqrt{55}}{4}$. **21.** $\pm 3; \pm \frac{3}{2}\sqrt{-2}$.

22. $5; -6; \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}$.

23. Posez $\sqrt[15]{x^7} = y$; l'équation donne: $y^2 - 6280y = 1\,843\,641$; d'où: $y = 6561; -281$; d'où: $x = \sqrt[7]{6561^{15}}; \sqrt[7]{-281^{15}}$, ou $3^{15}; -\sqrt[7]{281^{15}}$.

24. $\frac{(a+m)^2}{5m}(1 \pm \sqrt{2}); \frac{1}{5m}\left\{(a+m)^2 \pm \sqrt{2(a^2+m^2)^2 + 8a^2m^2}\right\}$.

25. $x = \frac{\left\{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\right\}^m - 1}{\left\{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\right\}^m + 1}$.

26. $\pm\sqrt{\frac{5(a^2+b^2) \pm \sqrt{25(a^2+b^2)^2 - 96a^2b^2}}{12}}$; ou:

$$\sqrt{\frac{5(a^2+b^2) + 4ab\sqrt{6}}{24}} \pm \sqrt{\frac{5(a^2+b^2) - 4ab\sqrt{6}}{24}}.$$

27. $\pm\sqrt{\frac{3(a^2+b^2) \pm \sqrt{9(a^2+b^2)^2 - 20a^2b^2}}{10}}$; ou:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(a^2+b^2) + 2ab\sqrt{5}}{5}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(a^2+b^2) - 2ab\sqrt{5}}{5}}.$$

28. $\sqrt[2n]{8}; \sqrt[2n]{-\frac{512}{27}}$. **29.** $8; 6\frac{44}{49}$. **30.** $9; -2; \frac{7 \pm \sqrt{173}}{2}$.

31. $2; 1$. **32.** 4.

33(1). Divisez par x^7; on trouve pour x:

$$0, \text{et } \frac{1}{2a}\sqrt{-ab+2a\sqrt{ac}} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{-ab-2a\sqrt{ac}}.$$

34. 8; 1; 0. **35.** 64; 1; 0. **36.** 625; 256; 0. **37.** 0; 1; 4.

38. $0; \pm 8; \pm i; \pm \frac{1}{4}\sqrt{2}; \pm \frac{1}{4}i\sqrt{2}.$ **39.** $0; 2; -1\frac{1}{2}$.

40. $0; \pm 3; \pm 1.$ **41.** $0; \pm 1; \pm \sqrt{-\frac{3}{2}}.$

42. Multipliez par x et ajoutez 1 de chaque côté; on trouvera: $x^4 - 3x^2 + 1 = 2x + 1$, ou $x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$, soit $(x^2-1)^2 = (x+1)^2$; $x = 2; -1$.

43. Multipliez par x, et ajoutez à chaque membre $4x^2 + 1$. On trouve $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1$, ou $(x^2+1)^2 = (2x+1)^2$; d'où $x = 2; -1 \pm \sqrt{-1}$.

44. Multipliez par x, écrivez $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x = 12x$; ajoutez des deux côtés $4x^2 + 9$; on trouve: $(x^2 - 2x + 3)^2 = (2x+3)^2$; d'où $x = 4; \pm\sqrt{-6}$.

45. Multipliez par x, écrivez: $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x = -4x$; ajoutez $4x^2 + 1$ des deux côtés, on trouvera: $(x^2 - x - 1)^2 = (2x-1)^2$; d'où $x = 3; 1; -2$.

46. Multipliez par x, puis ajoutez $4x^2 - 12x + 4$ des deux côtés; on aura: $(x^2 - 3x + 2)^2 = (2x-2)^2$; d'où $x = 4; 1$.

47. Développez, il viendra: $x^4 - 12x^2 + 4x + 15 = 0$, soit $x^4 - 8x^2 = 4x^2 - 4x - 15$. Ajoutez 16 des deux côtés; on trouvera ainsi: $(x^2-4)^2 = (2x-1)^2$; d'où résultent pour x les valeurs: $3; -1; -1 \pm \sqrt{6}$.

48. On multiplie par $2x+1$, ce qui donne $4x^4 - x^2 = 2x + 1$, soit $4x^4 = x^2 + 2x + 1$; d'où: $2x^2 = x + 1$, et $x = 1$

(1) Les équations de la forme $ax^m + bx^n + cx^p = 0$, où $n = \frac{m+p}{2}$, sont divisibles par x^p. Ce facteur donne une première racine $= 0$. La division par x^p effectuée, on tombe sur une équation de la forme $ax^{2k} + bx^k + c = 0$.

ou $-\frac{1}{2}$. La racine $-\frac{1}{2}$ a été introduite par le facteur $2x+1$, et doit être rejetée. En divisant l'équation proposée par $x-1$, on trouve : $2x^2+x+1=0$, ce qui donne pour les deux autres racines : $\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}$.

49. Ecrivez : $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+8\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}=\frac{63}{4}$; ajoutez de part et d'autre $\frac{17}{4}$, puis multipliez par 2 ; l'équation deviendra :

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{17}{2}}+\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{17}{2}\right)=40,$$ et on trouvera pour x les valeurs : 5 ; $-5\frac{1}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5185}}{12}$.

50. Faites passer un des radicaux dans le second membre, élevez au carré, réduisez ; on trouve : $x^2-x+1=2x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, soit $x^2-x+1=2\sqrt{x^2-x}$.

Posez $\sqrt{x^2-x}=y$; alors $y=1$, et $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

51. ± 5 ; $\pm 3{,}2\sqrt{-1}$; $\pm 4{,}656\,317$; $\pm 2{,}649\,772\sqrt{-1}$.

52. Divisez par $\sqrt{x}$; vous trouvez $2\sqrt{x}-x=-3$.

Posez $\sqrt{x}=y$; alors $y=3$; -1, et $x=0$; 1 ; 9.

53. Posez $\sqrt[3]{x}=y$; $x=8$; $-5{,}832$.

54. Posez $\sqrt[3]{-x}=y$; $x=27$; 64.

55. Multipliez par $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$; égalez le résultat à zéro ; le premier membre se trouve être le carré de $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}$; donc $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}$; d'où $x=-a$.

56. On élève au cube d'après la formule

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. On trouve $x=\frac{4a}{3}\sqrt{5}$.

57. On divise l'identité $\sqrt[3]{(a+x)^3} + \sqrt[3]{(a-x)^3} = 2a$ par l'équation proposée, ce qui donne $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = 2\sqrt[3]{a^2}$. D'où $x = \sqrt{\frac{a + 15a^2 + 48a^3 - 64a^4}{27}}$.

58. L'équation peut s'écrire $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$, et donne pour racines 1 ; 2 ; 3 ; 4.

59. L'équation peut s'écrire $2(4x^2 - 3x)^2 - 7(4x^2 - 3x) + 5 = 0$; d'où $x = \frac{5}{4}; 1; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}$.

60. Divisez par l'identité $\sqrt[4]{(x+a)^4} - \sqrt[4]{(x-a)^4} = 2a$; il viendra

$$\frac{(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a})^2}{\sqrt[4]{(x+a)^2} + \sqrt[4]{(x-a)^2}} = \frac{c}{a} = 1 + \frac{2\sqrt[4]{x^2 - a^2}}{\sqrt[2]{x+a} + \sqrt[2]{x-a}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{c^2 - 2ac + a^2}{4a^2};$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2 - c^2 + 2ac}{a^2 + c^2 - 2ac}; \text{ d'où } x = \frac{a^2 + 2ac - c^2}{2\sqrt{2ac - c^2}}.$$

XLV

2. Équations réciproques et autres.

1. Dans les équations comme celles des nˢ 1° à 15 inclusivement, on groupe ensemble le premier et le dernier terme du premier membre, puis les deux moyens, en isolant les facteurs communs. On met ainsi en évidence le facteur $x + 1$ (ou $x - 1$, comme dans le n° 6), qui donne une première racine. Après avoir divisé par ce facteur, on a une équation du second degré, qui donne les autres racines. Ce premier exemple peut s'écrire :
$(x^3 + 1) + x(x + 1) = 0$; d'où $(x^2 - x + 1) + x = 0$.
Donc $x = -1 ; \pm\sqrt{-1}$.

2. -1. Les trois racines sont égales. **3.** $-1 ; -2 ; -\frac{1}{2}$.

4. $-1 ; -3 ; -\frac{1}{3}$. **5.** $-1 ; \frac{a - b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4a^2}}{2a}$.

6. $+1; -1; -1.$ **7.** $1; \frac{-7 \pm \sqrt{-51}}{10}.$

8. $1; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}.$ **9.** $1; -\frac{1}{4}; -4.$ **10.** $1; -2 \pm \sqrt{3}.$

11. $1; \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4a^2}}{2a}$, ou :

$$1; \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(3a+b)(b-a)}}{2a}.$$

12. $1; \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}.$ **13.** $1; \frac{3 \pm 4i}{5}.$

14. $1; \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4a^2}}{2a}.$ **15.** $1; -3; -\frac{1}{3}.$

---

16. Les équations 16 à 19 inclusivement rentrent dans le premier cas indiqué dans les problèmes IIe série, page 129. Dans le nº 16, $\frac{b}{a}y = \frac{8}{4}y$; l'équation devient donc : $8y^3 + 16y^2 + 16y + 8 = 0$. Multipliant par $\frac{a^3}{b^3} = \frac{4^3}{8^3} = \frac{1}{8}$, on trouve $y^3 + 2y^2 + 2y + 1 = 0$; d'où $y = -1$, et $x = -2$. En divisant la proposée par $x + 2$, on obtient une équation du second degré, qui donne pour les deux autres racines $-1 \pm \sqrt{-3}$.

17. $-5; \frac{11 \pm \sqrt{21}}{2}.$ **18.** $2; -2; -2.$ **19.** $3; 1 \pm \sqrt{-8}.$

20. $1; \frac{1}{2}; 2.$ **21.** $-1; \frac{5}{7}; \frac{7}{5}.$ **22.** $1; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}.$

23. $1; \frac{243}{32}; \frac{32}{243}.$ **24.** $1; \frac{625}{16}; \frac{16}{625}.$ **25.** $1; -1.$

---

26. On voit que $+1$ et -1 sont racines. L'équation admet encore les racines $\pm \sqrt{2}$.

27. Les racines sont évidemment 0, m.

28. Une racine est évidemment 0; les autres sont $\pm\sqrt{2ab - a^2}$.

29. $0; \pm\sqrt[4]{2ab - a^2}; \pm i\sqrt[4]{2ab - a^2}$.

30. Dans les équations 30 à 34, décomposez en facteurs.
$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4)(x + 1) = 0$; d'où $x = -1; \pm 2$.

31. $(2x^2 - 3)(x - 1) = 0; x = 1; \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

32. $(x + 4)(x - 1)(x + 2); 1; -2; -4$.

33. $(x - 8)(x + 7)(x - 3); 3; -7; 8$.

34. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)(x - 5); \frac{1}{2}; -4; +5$.

---

35. On divise toute l'équation par x^2, puis on l'écrit :
$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$. Soit $x + \frac{1}{x} = z$;
alors $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$; en substituant on trouve :
$z^2 + z - 2 - 4 = 0$; d'où $z = 2; -3$, et
$x = +1; +1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

36. $2; \frac{1}{2}; \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$.

37. $3; \frac{1}{3}; \frac{-17 \pm 2\sqrt{70}}{3}$.

38. $4; \frac{1}{4}; \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

39. $3; \frac{1}{3}; 2; \frac{1}{2}$.

40. $2; \frac{1}{2}; \frac{11 \pm \sqrt{105}}{4}$.

41. $4; \frac{1}{4}; \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{8}$.

42. $3; \frac{1}{3}; -2; -\frac{1}{2}$.

43. Equation rentrant dans le 2e cas, forme I, page 130. Elle peut s'écrire : $(x^2 - 1)(ax^2 - bx + a) = 0$. Le premier facteur égalé à zéro donne les racines ± 1; le second, les racines $\frac{+b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$. Les exemples 46 à 48 se résolvent de la même manière.

44. $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; ± 1. **45.** 2; $\frac{1}{2}$; ± 1. **46.** 3; $\frac{1}{3}$; $+1$; -1.

47. $+1$; $+1$; $+1$; -1. **48.** 1; -1; $\frac{3 \pm 4\sqrt{-1}}{5}$.

49. Cette équation est la seconde forme que présentent les réciproques du 4e degré, dans lesquelles le terme en x^2 manque. Divisez l'équation par x^2, et faites $x + \frac{1}{x} = y$, on trouvera : $ax^2 - bx - \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, ou :
$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - b\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$, ou $y^2 - \frac{b}{a}y - 2 = 0$;
d'où $y = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 + 8a^2}{4a^2}}$, et en substituant à y sa valeur $x + \frac{1}{x}$, on trouve pour x :
$\frac{1}{4a}\left\{b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2} \pm \sqrt{2b^2 - 8a^2 \pm 2b\sqrt{b^2 + 8a^2}}\right\}$, ou :
$\frac{1}{4a}\left\{b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2} \pm \left(\sqrt{2b^2 - 8a^2 + 8a\sqrt{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{2b^2 - 8a^2 - 8a\sqrt{a^2 - b^2}}\right)\right\}$. C'est en suivant cette méthode qu'on résoudra les équations 50 à 54.

50. $3 \pm \sqrt{8}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{-35}}{6}$. **51.** $2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4}$.

52. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{-8}}{3}$. **53.** $4 \pm \sqrt{15}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{-63}}{8}$.

54. $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1 \pm 2\sqrt{-6}}{5}$.

---

55. Quand, dans l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ les coefficients a, b, c étant quelconques, on a la relation $d = \frac{(4ac - b^2)b}{8a^2}$, on peut ramener l'équation au second

degré. On la multiplie par $4a$, ou on la divise par un facteur qui rende le terme le plus élevé un carré parfait, on complète le carré dont les deux premiers termes représentent $a^2 + 2ab$ dans le carré de $(a + b)$, puis en isolant un facteur commun dans les termes suivants, on ramène l'équation à la forme $y^2 + my = n$. Dans l'exemple 55, multipliez par 16; on trouve
$64x^4 + 96x^3 + 48x^2 + 9x - 232 = 0$. $64x^4 + 96x^3$ sont les deux premiers termes de $(8x^2 + 6x)^2$, carré qui renferme $36x^2$; il reste donc $12x^2$.

Or $12x^2 + 9x = \frac{3}{2}(8x^2 + 6x)$; l'équation revient donc à

$$(8x^2 + 6x)^2 + \frac{3}{2}(8x^2 + 6x) - 232 = 0.$$

Posant $8x^2 + 6x = y$, on a $y^2 + \frac{3}{2}y = 232$; d'où

$y = \frac{29}{2}; -16$; et $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{8}; \frac{-3 \pm \sqrt{-119}}{8}$. Les quatre exemples 56 à 62 se résolvent par cette méthode.

56. Multipliez par 3; l'équation deviendra:

$$(3x^2 + 4x)^2 + \frac{14}{3}(3x^2 + 4x) + \frac{8}{3} = 0; \text{ d'où}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{3}; \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{3}.$$

57. Divisez par 7. $x = \frac{-4 \pm \sqrt{94}}{14}; \frac{-4 \pm \sqrt{-82}}{14}$.

58. $\frac{-3 \pm \sqrt{-91}}{10}; \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{10}$.

59. $\frac{-5 \pm 3\sqrt{5}}{4}. \frac{-5 \pm \sqrt{-55}}{4}$. **60.** $0; -\frac{2}{5}; \frac{-1 \pm 5i}{5}$.

61. $0; -2; \frac{-2 \pm \sqrt{-10}}{2}$. **62.** $0; -1; \frac{-3 \pm \sqrt{-195}}{6}$.

63. Décomposez en facteurs. S'il y a des facteurs binomes entiers, le second terme de ceux-ci doit être facteur du nombre entier qui termine l'équation, ce qui permet de former un premier diviseur, puis souvent un second. Dans

l'exemple 60, divisez par $x - 5$, puis le résultat par $x + 1$; l'équation pourra s'écrire:
$(x-5)(x+1)(x^2-4x-1)=0$; d'où $x = 5; -1; 2 \pm \sqrt{5}$.
La même méthode s'applique aux exercices 64 à 67.

64. $-3; -2; 2 \pm \sqrt{5}$. **65.** $-1; -3; 5; 7$.

66. $\frac{1}{2}; 2; 3; -5$. **67.** $(x+2)(2x-1)^3$; $x = -2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}$.

68. Extrayez la racine carrée; il vient $x^2 + 7x + 2$, avec un reste -25. L'équation peut donc s'écrire:
$(x^2+7x+2)^2-5^2 = \{(x^2+7x+2)+5\}\{(x^2+7x+2)-5\} = 0$,
ou $(x^2 + 7x + 7)(x^2 + 7x - 3) = 0$. Egalant chacun des facteurs à zéro, on trouve pour les racines
$\frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{-7 \pm \sqrt{61}}{2}$. Les équations 69 à 71 peuvent se résoudre par cette méthode; on peut leur appliquer aussi celle du numéro 55.

69. $\frac{3 \pm \sqrt{53}}{2}$; $\frac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$. **70.** $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{3 \pm \sqrt{-35}}{2}$.

71. $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{-39}}{2}$.

---

72. ± 1. **73.** $\pm i$.

74. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$; $x = 1$; $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

75. $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$; $x = -1$; $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

76. $(x^2+1)(x^2-1) = 0$; $x = \pm 1; \pm i$.

77. $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 =$
$(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = 0$;
d'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm \sqrt{-1})$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm \sqrt{-1})$.

78. $(x^5 + 1) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$; en égalant chaque facteur à zéro, et résolvant les équations qui en résultent, on trouve pour les valeurs de x:

-1; $\dfrac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$. Les signes devant $\sqrt{5}$ sous le radical et hors du radical, doivent être les mêmes deux à deux.

79. $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$;

d'où $x = 1$; $\dfrac{-1 \mp \sqrt{5} \mp i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

80. $x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$. Les racines sont donc (voir nos 74 et 75) : ± 1; $\dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

81. $x^6 + 1$ devient $x^6 - 1$ si l'on y fait $x = x\sqrt{-1}$. Donc, on trouvera les racines de $x^6 + 1 = 0$ en multipliant par $\sqrt{-1}$ les racines de l'exemple 80. On aura ainsi pour les six racines : $\mp \sqrt{-1}$; $\dfrac{\pm \sqrt{-1} \pm \sqrt{3}}{2}$.

---

82. L'équation est divisible par le facteur $x + 1$, qui donne une première racine -1. Après la division, on a une équation symétrique du 4e degré qui se ramène à
$y^2 + (a - 1)y - 2 - (a - b - 1) = 0$, ou
$y^2 + (a-1)y - (a - b + 1) = 0$, équation dans laquelle $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Elle donne $y = -\dfrac{a-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)}}{2}$,

et $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$; ou encore

$$x = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)}}{4} \pm \frac{\sqrt{2a^2 - 4b - 13 \mp \sqrt{(a+1)^2 - 4(b-1)}}}{4}.$$

83. -1; $-\dfrac{1}{2}$; -2; $\dfrac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}$.

84. $+1$; $+1$; -1; $\dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. 85. -1; 2; $\dfrac{1}{2}$; 4; $\dfrac{1}{4}$.

86. $1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{3}$. **87.** Divisez par $x - 1$; les racines sont

$1;\ -\frac{5}{3};\ -\frac{3}{5};\ \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

88. $1;\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$. **89.** $-1;\ \frac{6}{5};\ \frac{5}{6};\ 2 \pm \sqrt{3}$.

90. On fait $x = \frac{c}{b}y$(1), on substitue, on multiplie par $\frac{b^5}{c^5}$, puis on divise par le facteur en évidence, et il reste à résoudre une équation symétrique du 4e degré. Ici $d = \frac{6^3.2}{3^3} = 16$, et $e = \frac{6^5}{3^5} = 32$. Faisons $x = \frac{c}{b}y = 2y$ et substituons, il viendra :
$32y^5 + 32y^4 + 24y^3 + 24y^2 + 32y + 32 = 0$. Multiplions par $\frac{b^5}{c^5} = \frac{3^5}{6^5} = \frac{1}{32}$, nous aurons :
$y^5 + y^4 + \frac{3}{4}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + y + 1 = 0$. Divisons par $y + 1$ etc. ; il viendra $y = -1;\ \pm\sqrt{-\frac{3}{8} \pm \sqrt{-\frac{55}{64}}}$; d'où l'on déduit
$x = -2;\ +\sqrt{-1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-55}};\ -\sqrt{-1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-55}}$.

91. $-2;\ \frac{-3+\sqrt{57} \pm \sqrt{2-6\sqrt{57}}}{4};\ \frac{-3-\sqrt{57} \pm \sqrt{2+6\sqrt{57}}}{4}$.

92. $2;\ -2;\ -2;\ \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$.

93. Divisez par 15, puis par $x^2 + 1$; le quotient sera une équation réciproque du 4e degré; on aura $x = \pm\sqrt{-1};\ 3;\ \frac{1}{3};\ 5;\ \frac{1}{5}$.

94. Divisez par $x^2 - 1$; $x = \pm 1$; $\frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2};\ \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

95. Cet exemple et les deux suivants se ramènent à des équa-

(1) Voir exercices IIe série, page 130, 4°.

tions réciproques du 4e degré par des divisions successives. Divisez par $x^2 + 1$, puis par $x - 1$;

$$x = 1;\ \pm\sqrt{-1};\ 2;\ 3;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}.$$

96. Divisez par $x^2 - 1$ et $x + 1$; $x = 1;\ -1;\ -1;\ \frac{5}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3}.$

97. Divisez par $x^2 + 1$; $x + 1$; $x = -1;\ \pm\sqrt{-1};\ \frac{7}{3};\ \frac{3}{7};\ \frac{6}{5};\ \frac{5}{6}.$

98. 8; 22; 36. **99.** 10; -2; -34.

100. $5;\ -1+\sqrt{2};\ -1-\sqrt{2}.$

101. On divise par $(x-2)(x-3)$. L'équation symétrique qui en résulte peut être divisée par $(x+1)^2$, ce qui conduit à l'équation $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$, et aux racines $-1;\ -1;\ 2\pm\sqrt{3};\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ 2;\ 3.$

102. $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2};\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\ 1;\ -1;\ -2;\ 5.$

---

103. 1° 5; 3; 7. 2° -2; -5; 7.

104. 1° 6; -4; 2; 1. 2° 2; 1; -2; -3.

105. 1° $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};\ 2;\ -4.$ 2° $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2};\ 2;\ -4.$

106. 1° 1; 4; 2; -10. 2° $-1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ 2;\ -10.$

107. 1° $7;\ -2;\ \frac{5}{2};\ 2.$ 2° $-1;\ \frac{3\pm\sqrt{-7}}{4};\ \frac{5}{2};\ 2.$

3° $2\pm\sqrt{3};\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};\ \frac{5}{2};\ 2.$

108. Substituons dans la proposée $2x + 1$ à x; après réduction, il vient: $4x^4 - 6x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$, équation qui a une racine commune avec la proposée. Le P. G. C. D étant $x - 2$, cette racine est 2; une autre est donc 5. Si l'on divise l'équation donnée par $(x-2)(x-5)$, on

trouve $x^2 + 1$, qui donne pour les deux autres racines $\pm\sqrt{-1}$.

109. On substitue à x dans la proposée $2x - 3$, on simplifie, et on trouve l'équation $8x^4 - 86x^3 + 291x^2 - 325x + 100 = 0$, qui a une racine commune avec l'équation donnée. Le P. G. C. D étant $x - 5$, cette racine est 5. Une seconde racine est $2a - 3 = 7$. Les autres sont -2; $-\frac{1}{2}$.

110. Si l'on change le signe de x, ce qui ne fera changer de signe que les puissances impaires, on obtiendra l'équation $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$, qui a une racine commune avec l'équation proposée. Le P. G. C. D $x^2 - 16$, donne $x = \pm 4$; les autres racines sont $\frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$.

---

111. $\frac{\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{x-b}} = -\frac{a-x}{b-x} = \frac{a-x}{x-b}$; d'où :

$$(a-x)(x-b)^3 = (x-b)(a-x)^3, \text{ et } x = a;\ b;\ \frac{a+b}{2}.$$

112. On multiplie par le radical du dénominateur, et on trouve :

$$\sqrt[3]{(a-x)^2(x-b)} + \sqrt[3]{(a-x)(x-b)^2} = \frac{3(a-b)}{7};$$

on élève au cube, et on trouve :

$$(a-x)^2(x-b) + (a-x)(x-b)^2 + 3\sqrt[3]{(a-x)^3(x-b)^3}\left(\frac{3(a-b)}{7}\right)$$
$$= \frac{27(a-b)^3}{7^3}, \text{ ou}$$

$$(a-x)(x-b) + \frac{9(a-x)(x-b)}{7} = \frac{27(a-b)^2}{7^3};$$

$$(a-x)(x-b) = \frac{27(a-b)^2}{16 \times 7^2}; \text{ d'où } x = \frac{27a+b}{28};\ \frac{a+27b}{28}.$$

113. On élève à la cinquième puissance d'après la formule $(a+b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a+b)^3 - 5a^2b^2(a+b)$, ce qui donne : $a + x + a - x + 5\sqrt[5]{a^2 - x^2}\sqrt[5]{8a^3} - 5\sqrt[5]{(a^2 - x^2)^2}\sqrt[5]{2a} = 2a$; ou $\sqrt[5]{a^2 - x^2}\sqrt[5]{8a^3} = \sqrt[5]{(a^2 - x^2)^2}\sqrt[5]{2a}$; d'où :

$4(a+x)(a-x)a^3 = a\{(a+x)(a-x)\}^2$.

Donc $x = a; -a; \pm a\sqrt{-3}$.

114. Elevez à la 6e puissance par la formule
$(a+b)^6 = a^6 + b^6 + 6ab(a+b)^4 - 9a^2b^2(a+b)^2 + 2a^3b^3$.
On trouvera après réduction :
$6\sqrt[3]{4m^2} + 2\sqrt[3]{m^2-y^2} = 9\sqrt[6]{m^2-y^2}\sqrt[3]{2m}$. Puis élevant au cube par la formule $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, on a $436m^2 - 4y^2 = 405m\sqrt{m^2-y^2}$. On élève au carré, ce qui donne $16y^4 + 160537m^2y^2 = -26071m^4$. De là on tire : $y^2 = \frac{-160537m^2 \pm \sqrt{(160537m^2)^2 - 64 \times 26071m^4}}{32} =$
$-\frac{5,197m^2}{32}$, ou : $-\frac{321068,803m^2}{32}$;
$y = \pm\frac{3,22397m}{8}\sqrt{-1}; \pm\frac{801,3349m}{8}\sqrt{-1}$
$= \pm 0,40299m\sqrt{-1}; \pm 100,166861m\sqrt{-1}$.

115. 2,039 ; — 4,448 approx. **116.** 1,1412 ; 0,0088 approx.

117. $\frac{17 \pm 6\sqrt{-3}}{397}$.

XLVI

IV. PROBLÈMES DONNANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

1. ± 56. **2.** ± 45. **3.** ± 84. **4.** ± 14 et ± 22.
5. ± 640. **6.** ± 6 et ± 48. **7.** ± 12 ; ± 21.
8. 17 ; 9. **9.** ± 35 ; ± 21. **10.** ± 19 ; ± 20 et ± 2
11. ± 14 ; ± 16 et ± 18. **12.** ± 28 ; ± 32 ; ± 36.
13. 229 376 fr. **14.** ± 200 ; ± 225 ; ± 240.
15. ± 192 ; $\pm 192\sqrt{-1}$. **16.** ± 2 ; ± 7 ; ± 12.
17. ± 59 ; ± 47. **18.** $12\sqrt{3}^{m}$ et $6\sqrt{3}^{m}$. **19.** 96 ; 6
20. B-A $104^{km},95316$; B-M $178^{km},42038$.

21. B-D 140km; B-R 182km,99; D-R 230km. **22.** 5 jrs.
23. 40cm. **24.** 3 kgr. **25.** 5 jrs, 996.

---

26. 31s,3214. **27.** 2 h. 27m 41s,1276.
28. L'intensité de la lumière sur Vénus est 1,9124; la distance de Neptune 1 116 560 000 lieues. **29.** 109km, 5445.
30. à 86 752 lieues, ou 107 454,7 lieues du centre de la terre.

---

31. 24; 15. **32.** 12; 48; ou — 12; — 48. **33.** 22; 6.
34. 49; $\frac{529}{9}$(1). **35.** 196; $(-13)^2$. **36.** 49; $(-1)^2$.
37. 33; 34, ou — 33; — 34.
38. 10; 11; 12; 13; 14, ou — 22; — 23; — 24; — 25; — 26.
39. 18, ou — 22. **40.** 36, ou 24. **41.** 72; 24, ou 1; 49.
42. 10; 11; 12; 13; 14, ou — 2; — 1; 0; 1; 2. **43.** $\pm$ 4080.
44. 81; 27; ou — 80; $-\frac{80}{3}$. **45.** 21, ou — 22.
46. 6; — 6; — 1. **47.** 17 amis. **48.** 36m et 24m.
49. 391m et 80m. **50.** $13\,^1/_3$c. **51.** 20 œufs.
52. 21 mout.; 32 fr. **53.** 24 mout. **54.** 48 ou 16.
55. 225 et 441. **56.** 36 ans et 12 ans. **57.** 18 jrs; 35 kilm.
58. 14 jrs; 45 kilm. **59.** 42 oranges. **60.** 28 enfants.
61. 65 fr. ou 35 fr. **62.** 360m. **63.** 120m; 270m.
64. 276m; 190m. **65.** 14cm,556. **66.** 130 mètres.
67. 2 mètres. **68.** 4 garçons; 3 filles. **69.** 3m; sur 5m 2m.
70. 12 décim.; 5 dcm. **71.** 6 jrs. **72.** 63 oranges.
73. 12 oranges. **74.** 4 % et 3 %.
75. 16m de soie; 96m de drap; 92m de velours. **76.** $4\,^1/_2$ %.
77. $\frac{4}{7}$; $\frac{-12}{-9}$ ou $\frac{4}{3}$. **78.** 20 litres. **79.** 1872 hommes.
80. Le premier 10 litres; le second 8 l.; ou bien $8\frac{2}{21}$ et $6\frac{2}{21}$ litres.

(1) Cette solution correspond au radical pris avec le signe —.

81. Soit $2x^2$ le nombre des abeilles; $x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2$; d'où $x = 6$, et le nombre des abeilles 72.

82. 3; — 1; — 3. **83.** Premier 9 kilm.; second 8 kilm.

84. Le premier à 8 h. du soir; le second à 7 h. le même jour.

85. 12 et 15 décim. **86.** Ech. 15^m; rue 21^m.

87. Grand 45 h.; petit 63 h. **88.** 32 sec., ou $34^s,682$.

89. 316^s, ou $329^s \frac{11}{37}$. **90.** 111 sec.; 566 sec. **91.** 14 h.; $17\frac{1}{2}$ h.

---

92. $m\sqrt{\frac{s}{m^2+n^2}}$; $n\sqrt{\frac{s}{m^2+n^2}}$.

93. 1° $x = b + c - a \pm \sqrt{2(a-b)(a-c)}$; 2° 17; 15; 8.

94. $\frac{a}{2}$; $-a$. **95.** $\frac{a}{2}$. **96.** $x = \frac{a}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$.

97.(1) Soient AB la corde la plus rapprochée du centre C, et DE la plus éloignée, on a :
$\overline{BC}^2 = x^2 + a^2$; $\overline{EC}^2 = (c \pm x)^2 + b^2$; d'où :
$(c \pm x)^2 + b^2 = x^2 + a^2$, et
$x = \frac{(a+b)(a-b)}{2c} - \frac{c}{2}$; $-\frac{(a+b)(a-b)}{2c} + \frac{c}{2}$,
suivant que le centre est en dehors ou en dedans des deux cordes.

Enfin $r = \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)(a^2-b^2-2c^2)+c^4+4a^2c^2}{4c^2}}$.

98. Soient CD la perpendiculaire menée de C sur AB; m le segment AD et n le segment DB. On a $CD = \frac{ab}{d}$;

$m = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{d^2}}$; $n = \pm\sqrt{b^2 - \frac{a^2b^2}{d^2}}$, et

$x = \pm\frac{a}{d}\sqrt{d^2-b^2} \pm \frac{b}{d}\sqrt{d^2-a^2}$.

(1) Le lecteur est prié de faire les figures.

99. On a $(a+b+x)(-a+b+x)(a-b+x)(a+b-x)=16Q^2$; d'où :

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab + 2Q)(ab - 2Q)}}.$$

Le problème est impossible quand $2Q > ab$.

100. $x = 3039^m,415$ ou $1188^m,276$.

101. $c = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2m^2)}$. — Si l'on prolonge la médiane d'une quantité égale à elle-même jusqu'en H, le triangle ACH sera équivalent au triangle donné, et on aura pour l'aire :

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)(-a+b+2m)(a-b+2m)(a+b-2m)}.$$

102. Si du point C on abaisse sur c la perpendiculaire CE, et qu'on fasse $AD = d$, on a $AE = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, et

$$x = \sqrt{b^2 + d^2 - d\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{c}}.$$

103. $x = 32^m,59$.

---

104. Soient $AP = \alpha$ la perpendiculaire abaissée de A sur XY; $AR = \beta$ la perpendiculaire abaissée de B sur XY; x la distance PD. On a d'ailleurs $PR = a$. L'attraction exercée sur D par le corps de masse m placé en A, est égale à $\frac{m}{\overline{AD}^2} = \frac{m}{x^2 + \alpha^2}$; celle du corps de masse m' est $\frac{m'}{\overline{BD}^2} = \frac{m'}{(a-x)^2 + \beta^2}$. On a donc $\frac{m}{x^2+\alpha^2} = \frac{m'}{(a-x)^2+\beta^2}$; d'où $x = \frac{am \pm \sqrt{a^2mm' + (m - m')(\alpha^2m' - \beta^2m)}}{m - m'}$.

La solution négative signifie qu'il faudrait compter la valeur de x depuis P en allant vers la gauche.

105. Soit R le rayon de la sphère; $x = R\sqrt{2}$.

106. Soient x la profondeur du puits ; g la gravité ; t le temps que la pierre met à atteindre le fond. On a $x = \frac{gt^2}{2}$; d'où $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. — Soient v la vitesse du son dans l'air ; T le

temps que met le bruit de la chute à remonter; alors $x = vT$; d'où $T = \frac{x}{v}$. — Donc $T + t = s = \frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}}$;

d'où $x = \dfrac{\frac{s}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{s^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$, ou :

$(A) x = \dfrac{v^2 + gvs \pm v\sqrt{v^2 + 2gvs}}{g}$. D'après la nature de la question, on a $\frac{x}{v} < s$, ou $x < vs$. L'équation (A) peut s'écrire $x = \dfrac{v^2 + gvs}{g} \pm \dfrac{v\sqrt{v^2 + 2gvs}}{g}$, d'où

$\dfrac{gx - gvs - v^2}{g} = \pm \dfrac{v\sqrt{v^2 + 2gvs}}{g}$, ou encore

$\dfrac{g(x - vs) - v^2}{g} = \pm \dfrac{v\sqrt{v^2 + 2gvs}}{g}$. Mais x étant plus petit que vs, le premier membre de cette équation est négatif; le radical du second membre doit donc être pris avec le signe —, et la solution du problème est donnée par l'équation $x = \dfrac{v^2 + gvs - v\sqrt{v^2 + 2gvs}}{g}$. La solution fournie par le radical positif est étrangère à la question; elle répondrait au problème suivant :

Une personne placée au bord d'un puits y laisse tomber une pierre, et au même instant tire un coup de pistolet. Un observateur placé au fond du puits entend le choc de la pierre s *secondes après que le bruit du coup de feu est parvenu à son oreille. Quelle est la profondeur du puits?*

107. $70^m,45$.

V. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

XLVII

1. Equations numériques.

1. $x = \pm 25$
$y = \pm 6.$

2. $y = \pm 1$
$z = \pm 9.$

3. $x = \pm 5$
$y = \pm 4.$

4. $x = \pm 8$
$y = \pm 6.$

5. $x = 7;\ 5$
$y = 5;\ 7.$

6. $y = 20;\ -12$
$z = 12;\ -20.$

7. $x = \frac{2}{3};\ \frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2};\ \frac{2}{3}.$

8. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

9. $x = 7;\ 5$
$y = 5;\ 7.$

10. $x = 13;\ -13$
$y = 11;\ -11.$

11. $x = 9;\ -12$
$y = 12;\ -9.$

12. $x = 7;\ -3\frac{100}{138}$
$x = 8;\ 12\frac{40}{138}.$

13. $x = 3;\ -\frac{33}{8}$
$y = 4;\ -\frac{11}{2}.$

14. $x = 25;\ 12\frac{1}{4}$
$y = 9;\ 20\frac{1}{4}.$

15. $x = 5;\ 2;\ 6;\ 1$
$y = 2;\ 5;\ 1;\ 6.$

16. $y = 11;\ 3$
$z = 3;\ 11.$

17. $x = \frac{3}{4};\ \frac{1}{5}$
$y = \frac{1}{5};\ \frac{3}{4}.$

18. $x = 3;\ -1$
$y = 1;\ -3.$

19. $x = 13;\ 9$
$y = -9;\ -13.$

20. $x = 13$
$y = 7.$

21. $x = \frac{2}{3}$
$y = \frac{5}{6}.$

22. $x = 13;\ -13$
$y = 7;\ -7.$

23. Posez $x = vy$; $x = \pm 13;\ \pm 10\sqrt{2}$
$y = \pm 7;\ \pm 3\sqrt{2}.$

24. $x = 11;\ -20$
$y = 8;\ -\frac{22}{5}.$

25. $x = 7;\ -\frac{6}{5}$
$y = -3;\ 17\frac{1}{2}.$

26. $x = 20;\ -20$
$y = 4;\ -4.$

27. $x = 14 ; 0$
$y = 22 ; 0.$

28. $x = 48 ; 0$
$y = 16 ; 0.$

29. $x = \pm 3$
$y = \pm 1.$

30. $x = 4 ; 38\frac{6}{11}$
$y = 7 ; -44\frac{9}{11}.$

31. $x = 5 ; 14\frac{51}{71}$
$y = 2 ; 15\frac{43}{71}.$

32. $x = 7 ; -22$
$y = 8 ; \quad 37.$

33. $x = 7 ; 5$
$y = 5 ; 7.$

34. $x = 9 ; 8$
$y = 8 ; 9.$

35. $x = 12$
$y = 11.$

36. $x = 5 ; 4$
$y = 3 ; 4.$

37. $x = 8 ; 13$
$y = 12 ; 7.$

38. $x = 7 ; 4\frac{9}{14}$
$y = 2 ; 3\frac{5}{14}.$

39. $x = 4 ; 5$
$y = 5 ; 4.$

40. $x = 6 ; 3$
$y = 3 ; 6.$

41. $x = 5 ; -12$
$y = 12 ; -5.$

42. $x = \pm 7 ; \pm 3$
$y = \pm 3 ; \pm 7.$

43. $x = \pm 11 ; \pm 6$
$y = \pm 6 ; \pm 11.$

44. $x = \pm 14 ; \pm 12$
$y = \pm 12 ; \pm 14.$

45. $x = 7 ; 2$
$y = 2 ; 7.$

46. $x = 4 ; \frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2} ; 4.$

47. $x = 7 ; -\frac{2}{3}$
$y = \frac{2}{3} ; -7.$

48. $x = 10 ; -8$
$y = 8 ; -10.$

49. $x = 5 ; -6 ; \quad 5 ; -6$
$y = 11 ; -12 ; -12 ; 11.$

50. $x = \frac{3}{4} ; -\frac{7}{4} ; \quad \frac{3}{4} ; -\frac{7}{4}$
$y = \frac{1}{4} ; -\frac{5}{4} ; -\frac{5}{4} ; \quad \frac{1}{4}.$

51. $x = 3 ; 2 ; -3 \pm \sqrt{3}$
$y = 2 ; 3 ; -3 \mp \sqrt{3}.$

52. $x = 5 ; -3 ; \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$
$y = 3 ; -5 ; \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2}.$

53. $x = 14 ; \quad 52 ; -37 \pm \sqrt{431}$
$y = 20 ; -18 ; \quad 1 \mp \sqrt{431}.$

54. $x = 30 ; -6 ; -12 \pm 6\sqrt{7}$
$y = 16 ; -20 ; -2 \pm 6\sqrt{7}.$

55. Prenez $x + y$ pour inconnue.
$x = 3 ; 12 ; -8 + 2\sqrt{7}$
$y = 12 ; 3 ; -8 - 2\sqrt{7}.$

56. $x = 45 ; -20 ; \pm 6\sqrt{29} - 12$
$y = 20 ; -45 ; \pm 6\sqrt{29} + 12.$

57. $x = 18 ; \frac{8}{3} ; \frac{\pm \sqrt{249} - 21}{2}$
$y = 8 ; 54 ; \frac{\mp 3\sqrt{249} - 63}{2}.$

58. $x = 4;\ 1$ $y = 1;\ 4.$ **59.** $x = 11;\ -3$ $y = 3;\ -11.$ **60.** $x = \pm\frac{3}{4}$ $y = \pm\frac{2}{3}.$

61. Elevez $x + y = 7$ à la quatrième puissance, et soustrayez le résultat de la première équation. Il viendra :
$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 2064$, ou $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 = \frac{516}{xy}.$
Soustrayez ce résultat du carré de l'équation $x + y = 7$; il viendra $\frac{1}{2}xy = 49 - \frac{516}{xy}$, ce qui donne $xy = 86$ ou 12.
Le calcul est ainsi ramené au cas du numéro 5, et on trouve : $x = 4$ ou 3; $y = 3$ ou 4.

62. $x = 7;\ 4;\ \frac{11 \pm 7\sqrt{-15}}{2}$

$y = 4;\ 7;\ \frac{11 \mp 7\sqrt{-15}}{2}.$

63. Posez $x = z + \alpha$; $y = z - \alpha$; la première équation donne $\alpha = \frac{3}{2}$. La seconde donne :
$609 = (z + \alpha)^4 - (z - \alpha)^4 = 8z^3\alpha + 8z\alpha^3$; d'où $4z^3 + 9z = 203$, ou $4z^3 + 9z - 203 = 0$. Le premier membre est divisible par $2z - 7$ et donne pour quotient $2z^2 + 7z + 29$. Egalant chaque facteur à zéro, on trouve :
$z = \frac{7}{2};\ \frac{-7 \pm i\sqrt{183}}{4}$; d'où :

$x = 5;\ \frac{-1 \pm i\sqrt{183}}{4}$, et $y = 2;\ \frac{-13 \pm i\sqrt{183}}{4}.$

64. $x = 5;\ -2;\ \frac{3 \pm \sqrt{-67}}{2}$

$y = 2;\ -5;\ \frac{-3 \pm \sqrt{-67}}{2}.$

65. Elevez la seconde à la 4e puissance ; retranchez le résultat de la première équation, vous trouverez :
$4x^2 - 6xy + 4y^2 = \frac{690}{xy}$; retranchez de cette dernière

équation 4 fois le carré de la seconde ; il viendra

$2xy = \frac{690 - 16xy}{xy}$; d'où

$xy = 15 ; -23$; et $x = 5 ; -3 ; 1 \pm \sqrt{-22}$;

$y = 3 ; -5 ; -1 \pm \sqrt{-22}$.

66. $x = 4 ; -\frac{2}{3} ; \frac{5 \pm \sqrt{-199}}{3}$

$y = \frac{2}{3} ; -4 ; \frac{-5 \pm \sqrt{-199}}{3}$.

67. $x = 5 ; 3 ; 4 \pm \sqrt{-33}$

$y = 3 ; 5 ; 4 \mp \sqrt{-33}$.

68. $x = 5 ; 3$

$y = 3 ; 5$.

69. $x = 9 ; 7 ; \frac{1}{2}\left(25 \pm \frac{1}{5}\sqrt{-3779}\right)$

$y = 7 ; 9 ; \frac{1}{2}\left(25 \mp \frac{1}{5}\sqrt{-3779}\right)$.

70. $x = 7 ; -4$

$y = 4 ; -7$.

71. $x = 6 ; 4$

$y = 4 ; 6$.

72. $x = 9 ; \frac{25}{4}$

$y = 4 ; \frac{25}{4}$.

73. Dans les équations de ce genre, prenez une inconnue auxiliaire (v) et posez $y = vx$, puis substituez.

$x = \pm 10 ; \pm \frac{77\sqrt{61}}{61} ; y = \pm 3 ; \pm \frac{25\sqrt{61}}{61}$.

74. $x = \pm 2 ; \pm \frac{53}{19}$

$y = \pm 3 ; \pm \frac{47}{19}$.

75. $x = \pm 2 ; \pm \frac{9\sqrt{129}}{86}$

$y = \pm 1 ; \mp \frac{31\sqrt{129}}{258}$.

76. Posez $\sqrt{x} = z\sqrt{y}$ et substituez. Il viendra :

$y^2(z^4 + z) = 420$; $y^2(z^3 + 1) = 280$. Divisant ces équations l'une par l'autre, on a $\frac{3}{2} = \frac{z^4 + z}{z^3 + 1} = z = \sqrt{\frac{x}{y}}$;

d'où $x = \frac{9y}{4}$, et $x = \pm 18 ; y = \pm 8$.

77. $x = \pm 12$

$y = \pm 3$.

78. Ajoutez à la première équation le triple de la seconde; il viendra $(x + y)^3 = 512$; d'où $x + y = 8$. La seconde donne $xy(x + y) = 8xy = 120$; d'où l'on tire : $x - y = \pm 2$; de là $x = 5; 3$, et $y = 3; 5$.

79. $x = 7; -2$
$y = 2; -7$.

80. $x = 8; 7$
$y = 7; 8$.

81. $x = 11; -9$
$y = 9; -11$.

82. La première équation donne $x^2y^4 = 17 - y^2$; la seconde $x^2y^4 = \frac{(5-y)^2}{y^4}$; d'où $17y^4 - y^6 = 25 - 10y + y^2$, soit $y^6 - 17y^4 + y^2 - 10y + 25 = 0$, qu'on peut écrire : $y^4(y^2 - 1) - 16y^2(y^2 - 1) - 5(3y^2 + 2y - 5) = 0$. Le premier membre est divisible par $y - 1$, ce qui donne $y - 1 = 0$; d'où $y = 1$. Cette valeur reportée dans la seconde équation donne $x = 4$.

83. Divisez la première par la seconde, il viendra :
$\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2} = \frac{671}{11}$, ou $\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2} - 1 = \frac{671}{11} - 1$, soit
$\frac{4xy}{(x-y)^2} = 120$; d'où $\frac{4xy}{(x-y)^2} + 1 = 121$, ou
$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 121$; d'où $\frac{x+y}{x-y} = \pm 11$, et $x = \frac{6y}{5}$, ou $y = \frac{5x}{6}$.
En substituant dans la seconde équation, on trouve :
$x = 6; 5$, et $y = 5; 6$.

84. *Autre méthode*, qu'on peut employer généralement quand les équations sont symétriques par rapport à x et y. Posez $x = u + v$; $y = u - v$, substituez et divisez l'une par l'autre les équations résultantes. Il viendra :
$\frac{u^2 + v^2}{2v^2} = \frac{17}{2}$; d'où $\frac{u}{v} = \pm 4$. De là $v = \pm 1$; $u = \pm 4$.
Donc $x = 5; 3$, et $y = 3; 5$.

85. *Troisième méthode.* Posez $x = vy$, substituez, divisez les deux équations résultantes l'une par l'autre, vous aurez $\frac{v^2 + 1}{(v-1)^2} = 113$; d'où $v = \frac{8}{7}; \frac{7}{8}$, et $x = \frac{8y}{7}; \frac{7y}{8}$. D'où :
$x = 8; 7$, et $y = 7; 8$.

86. $x = 4; 3$
$y = 3; 4$.

87. $x = 3$
$y = 1$.

88. Posez $x^2 + y^2 = u$; $x + y = v$

$x = 9$; 5 ; $53 \pm \sqrt{-2802}$

$y = 5$; 9 ; $53 \mp \sqrt{-2802}$.

89. $x = 6$; $\frac{41}{4}$

$y = 4$; $\frac{39}{4}$.

90. A la première, ajoutez deux fois la seconde ; il viendra :

$4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + y = (2x + y)^2 + (2x + y) = 210$; d'où :

$2x + y = 14$; -15, et $x = 5$; $4\frac{3}{4}$; $\frac{-19 \pm \sqrt{697}}{8}$

$y = 4$; $4\frac{1}{2}$; $\frac{-41 \mp \sqrt{697}}{4}$.

91. On peut écrire les équations données (*a*) $(x + y)^2 - xy = 189$; (*b*) $(x + y) - \sqrt{xy} = 9$. Divisant (*a*) par (*b*), on a :

$x + y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 21$; ajoutant (*b*) : $x + y = 15$; d'où :

$x = 12$; 3, et $y = 3$; 12.

92. La première équation donne : (*m*) $(x + y)^3 = 216(x - y)$; la seconde (*b*) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)^3 = 12096(x + y)$.

Divisant (*b*) par (*m*), on a : (*n*) $x^2 - xy + y^2 = 56\frac{x + y}{x - y}$.

En faisant dans (*m*) et (*n*) $x = vy$, puis divisant les deux résultats l'un par l'autre, on arrive à l'équation

$20v^4 - 109v^3 + 66v^2 - 109v + 20 = 0$, qui donne :

$v + \frac{1}{v} = \frac{26}{5}$ ou $\frac{1}{4}$. La seconde valeur donne des racines imaginaires. La première donne $v = 5$; $\frac{1}{5}$, d'où

$x = \pm 10$; ± 2 ; $\pm 10i$; $\pm 2i$

$y = \pm 2$; ± 10 ; $\pm 2i$; $\pm 10i$.

93. La première équation donne $x^{\frac{3}{5}} = 35 - y^{\frac{1}{2}}$; la seconde :

$x^{\frac{3}{5}} = \left(5 - y^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 125 - 75y^{\frac{1}{6}} + 15y^{\frac{2}{6}} - y^{\frac{3}{6}}$; d'où :

$y^{\frac{2}{6}} - 5y^{\frac{1}{6}} = -6$, ce qui donne : $x = 3^5$; 2^5
$y = 2^6$; 3^6.

94. $x = \pm 4$; ± 3 ; $\pm 3\sqrt{2}$; $\pm 2\sqrt{2}$

$y = \pm 3$; ± 2 ; $\pm 2\sqrt{2}$; $\pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

95. $x = \pm 7; \pm 9\sqrt{-1}$
$y = \pm 3; \mp 11\sqrt{-1}.$

96. $x = 5; -5; \quad 2; -2$
$y = 2; -2; -5; \quad 5.$

97. $x = 3; -3; 1; -1$
$y = 1; -1; 3; -3.$

98. $x = 5; 2; \dfrac{21 \pm \sqrt{-669}}{6}$
$y = 2; 5; \dfrac{21 \mp \sqrt{-669}}{6}.$

99. Posez $y = vx$; il viendra $x^4(1 + v)(1 + v^3) = 175$, et $x^2(1 + v + v^2) = 19$; élevez cette dernière équation au carré; divisez par la première; toutes réductions faites, il viendra : $186v^4 + 11v^3 - 525v^2 + 11v + 186 = 0$, équation réciproque du quatrième degré qui donne :
$v = \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \dfrac{-69 \pm \sqrt{917}}{62}$. Les deux premières valeurs donnent :
$x = 2; -2; 3; -3$
$y = 3; -3; 2; -2.$

100. $x = \frac{1}{2}; 1; 0; \dfrac{1 \pm \sqrt{-1}}{2}$
$y = \frac{1}{2}; 0; 1; \dfrac{1 \mp \sqrt{-1}}{2}.$

101. On donne aux premiers membres la forme d'un produit de deux facteurs, puis on divise les deux équations l'une par l'autre, ce qui donne $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{3}$; d'où $x = 4y$. De là
$x = \dfrac{\pm 4}{\sqrt[4]{17}}; \dfrac{\pm 1}{\sqrt[4]{17}}; \qquad y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt[4]{17}}; \dfrac{\pm 4}{\sqrt[4]{17}}.$

102. Divisez la première par la seconde, il viendra :
$\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{7}{10}$; posez ensuite $y = vx$ et substituez dans cette dernière équation; on trouvera $v = -\frac{1}{3}; -3$; d'où $x = 6; -2$, et $y = -1; 6$.

103. La première équation peut se mettre sous la forme :
$19(x^2 - xy + y^2)(x + y)^2 = 175(x^2 + xy + y^2)(x - y)^2$,
et en remplaçant $x^2 + y^2$ par sa valeur tirée de la seconde

équation : $19(13-xy)(13+2xy)=175(13+xy)(13-2xy)$.
Cette dernière équation donne $xy=6\,;\ -\frac{169}{12}$; d'où
$x=3\,;\ -3\,;\ 2\,;\ -2$
$y=2\,;\ -2\,;\ 3\,;\ -3.$

104. Posez $x^2=z+v$, et $y^2=z-v$, substituez et tirez de chaque équation la valeur de v^2 ; ces valeurs égalées donneront l'équation $4z^3-51z+65=0$, qui est divisible par $2z-5$. Donc $z=\frac{5}{2}$. Mais la seconde équation donne $v^2=\frac{17-2z^2}{2}=\frac{9}{4}$; d'où $v=\pm\frac{3}{2}$. De là
$x=\pm 2\,;\ \pm 1$, et $y=\pm 1\,;\ \pm 2$.

105. Elevez II (1) à la 7e puissance et soustrayez de I ; puis divisez le résultat par $7xy$; il viendra :

$$(a)\ x^5-3x^4y+5x^3y^2-5x^2y^3+3xy^4-y^5=\frac{2058}{7xy}.$$

Elevez II à la 5e puissance, soustrayez de (a) et divisez le résultat par xy ; il viendra :

$$(b)\ 2x^3-5x^2y+5xy^2-2y^3=\frac{2058-224xy}{7x^2y^2}.$$

Tirant de II la valeur de $2(x-y)^3$ et soustrayant de (b), on trouvera :

$$xy(x-y)=2xy=\frac{2058-224xy-112x^2y^2}{7x^2y^2},\ \text{ou}$$

$x^3y^3+8x^2y^2+16xy-147=0$. Ce résultat, divisible par $xy-3$, peut s'écrire $(xy-3)(x^2y^2+11xy+49)=0$. Le premier facteur donne $xy=3$; d'où
$x=3\,;\ -1$, et $y=1\,;\ -3$. Le second facteur en xy donnerait quatre racines imaginaires.

106. Simplifiez le premier membre de la première équation en divisant des deux côtés par $x+y$, ce qui donne :

$$\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^2-xy+y^2}=\frac{205}{13}=$$
$$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-xy(x^2+y^2)-x^2y^2}{x^2+y^2-xy}.$$

Posons $x^2+y^2=u\,;\ xy=v$, et substituons ; l'équation ci-dessus donne $\frac{u^2-uv-v^2}{u-v}=\frac{205}{13}=u+v-\frac{uv}{u-v}$;

(1) La 2e des équations données.

la seconde $u + v = 21$. Donc $\frac{uv}{u - v} = 21 - \frac{205}{13} = \frac{68}{13}$.
De là on tire $v = 4 = xy$, et
$x = 4;\ -4;\ 1;\ -1$
$y = 1;\ -1;\ 4;\ -4.$

107. $x = 16;\ \frac{49}{16}$
$y = 9;\ \frac{441}{16}.$

108. On élève la première équation au carré, on retranche 4 de part et d'autre, ce qui donne, en prenant les racines carrées des deux côtés : $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} - \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{3}{2}$; ajoutant membre à membre avec la première, on a :
$2\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = 4$; d'où $\frac{6x}{x+y} = 4$. Substituant à y sa valeur tirée de la seconde équation, on trouve :
$x = 6;\ -3$, et $y = 3;\ -\frac{3}{2}$.

109. Si dans la seconde équation on fait $y = vx$, elle donne $v = 8$ ou 2 : d'où $y = 8x$ ou $2x$. Substituant dans la première équation, on a :
$x = 2;\ -\frac{107}{18};\ 8;\ -\frac{214}{9}$
$y = 4;\ -\frac{107}{9};\ 64;\ -\frac{1712}{9}.$

110. Posez $y = vx$; les deux équations donneront respectivement :
$x\left\{\sqrt{\frac{1}{v}} - v\sqrt{v}\right\} = \frac{65}{6}$, et $x = \frac{5}{1 - v}$. Divisant l'une par l'autre, on trouve une équation réciproque du quatrième degré en v qui donne $v = \frac{9}{4};\ \frac{4}{9}$, d'où :
$x = -4;\ 9$, et $y = -9;\ 4$.

---

111. $x = 12$
$y = 6$
$z = 9.$

112. Additionnant les trois équations ensemble, on trouve $(x + y + z)^2 = 196$; d'où $x + y + z = \pm 14$, et $x = \pm 5;\ y = \pm 2;\ z = \pm 7.$

113. $x = \pm 6;\ 0$, $y = \pm 4;\ 0$, $z = \pm 8;\ 0.$

114. $x = \pm 4$, $y = \pm 3$, $z = \pm 7.$

115. $x = 3;\ 0$, $y = 2;\ 0$, $z = 5;\ 0.$

116. On additionne les deux premières équations, et de la somme, on retranche la troisième; on trouve ainsi les valeurs de xy, xz, yz, qui donnent $x = \pm 9$; $y = \pm 7$; $z = \pm 3$.

117. Déterminez d'abord la valeur des produits xy, xz, yz. $x = \pm 6$; $y = \pm 5$; $z = \pm 4$.

118. $x = \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ y = \pm \frac{3}{4};\ \pm \frac{\sqrt{-15}}{12};\ z = \pm \frac{1}{2};\ \pm \frac{\sqrt{-15}}{6}.$

119. $x = 4;\quad \frac{5}{2};\quad \frac{1}{4}\sqrt[3]{4(29 \pm \sqrt{201})}$

$y = 2;\quad 2;\quad 40$

$z = 10;\ 16;\quad \frac{1}{5}\sqrt[3]{25(29 \pm \sqrt{201})}.$

120. $x = \pm 11;\ \pm 11\sqrt{-1}$, $y = \pm 3;\ \pm 3\sqrt{-1}$, $z = \pm 7;\ \pm 7\sqrt{-1}.$

121. $x = 12;\ 0$, $y = 3;\ 0$, $z = 9;\ 0.$

122. $x = \pm 8$; $y = \pm 3$; $z = \pm 1$.

123. $x = \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3};\ \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{5};\ \frac{1}{4}.$

124. $x = 3;\ 5$, $y = 4;\ 4$, $z = 5;\ 3.$

125. $x = 8;\ -16$, $y = 4;\ -2$, $z = 6;\quad \frac{6}{7}.$

126. $x = \frac{1}{3};\ -\frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{4};\ -\frac{1}{7}$, $z = \frac{1}{6};\quad \frac{1}{28}.$

127. $x = \pm 6$, $y = \pm 8$, $z = \pm \frac{1}{2}.$

128. $x = \frac{8}{3};\ \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2};\ \frac{8}{3}$, $z = 2;\ 2.$

129. $x = 3;\ 3;\ -\frac{37}{6};\qquad y = 9;\ 7;\ \frac{151 \pm \sqrt{-15531}}{12};$

$z = 7;\ 9;\ \frac{151 \mp \sqrt{-15531}}{12}.$

130. $x = 5; -3;\quad y = 3; -5;\quad z = 1;\ 9.$

131. Multipliez II par z; substituez dans le résultat à xyz sa valeur, et à $x + y$ sa valeur tirée de I, il viendra $z^3 - 20z^2 + 121z - 210 = 0$, équation divisible par $z - 3$. On obtient ainsi :

$$x = 10;\ 3;\ 7;\ 7;\ 3;\ 10$$
$$y = 7;\ 10;\ 3;\ 10;\ 7;\ 3$$
$$z = 3;\ 7;\ 10;\ 3;\ 10;\ 7.$$

132. $x = 5;\ 5;\ 4$

$$y = 3;\ 1;\ \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$
$$z = 1;\ 3;\ \frac{5 \mp \sqrt{13}}{2}.$$

133. $x = 7;\ 1;\ 4 \pm \sqrt{-151}$

$$y = 1;\ 7;\ 4 \mp \sqrt{-151}$$
$$z = \quad 2;\ -18.$$

134. De II on retranche III, et on trouve $x^2 - y^2 = 5(x - y)$, ou $x + y = 5$, qu'on élève à la 5e puissance. Du résultat, on retranche I. Il reste

$$x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + xy^4 = xy(x^3 + 5xy(x + y) + y^3) = 1110,$$

ou $x^3 + 25xy + y^3 = \frac{1110}{xy}$. De ce résultat, on retranche le cube de $x + y = 5$, et on obtient une équation qui donne $xy = 6; -\frac{37}{2}$; d'où: $x = 3;\ 2;\ \frac{5 \pm 3\sqrt{11}}{2}$

$$y = 2;\ 3;\ \frac{5 \mp 3\sqrt{11}}{2}\qquad z = 7;\ 12;\ \frac{-30 \mp 15\sqrt{11}}{2}.$$

---

135. $x = 2;\ -7$
$y = 5;\ 4$
$z = 4;\ 5$
$u = 3;\ 12.$

136. $x = 5;\ \frac{50}{17}$
$y = 1;\ \frac{52}{17}$
$z = 6;\ \frac{123}{17}$
$u = 4;\ \frac{47}{17}.$

137. $x = 17;\ 3;\ 10 \pm \sqrt{58}$
$y = 5;\ -4$
$z = 4;\ -5$
$u = 7;\ \pm\sqrt{58}.$

138. Elevez III au carré; ajoutez au résultat IV et le double de I. Le premier membre de l'équation ainsi obtenue est le carré de la somme des quatre inconnues, et donne

$x + y + z + u = 20$; d'où $zu = 6$; ce qui donne pour les inconnues

$x = 8; 7; \quad y = 7; 8; \quad z = 3; 2; \quad u = 2; 3.$

139. On élève II et III au carré; on ajoute la somme des résultats avec le double de I et on procède comme dans le précédent exemple.

$x = 11; -3; \quad y = 3; -11; \quad z = 7; 2; \quad u = 2; 7.$

140. Dans III remplacez x par $\frac{uz}{y}$, puis u par sa valeur tirée de IV; tout calcul fait, on trouve $y^2 - 9z - z^2 = 9y$. Remplaçant dans I x^2 et u^2 par leurs valeurs tirées de III et IV, on trouve $z = y - 4$. Ces deux équations donneront y et z.

$x = 7; 2; \quad y = 2; 7; \quad z = -2; -7; \quad u = -7; -2.$

141. $x = 4; 3; \quad y = 3; 4; \quad z = 6; 2; \quad u = 2; 6.$

142. Elevez II et III à la troisième puissance et ajoutez les résultats; à cause de IV, on aura:

$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + 36zu = 468$; combinant ce résultat avec I, on en tire $4zu = 24$; donc:

$x = 3; 2; \quad y = 2; 3; \quad z = 1; 6; \quad u = 6; 1.$

143. Posez $(x + y) - (z + u) = t$, puis combinant avec II, on obtient $x + y = \frac{28 + t}{2}$; $z + u = \frac{28 - t}{2}$. Elevant ces deux équations au cube et additionnant les résultats, on a, à cause de I et III:

$$x^3+y^3+z^3+u^3+3xy(x+y)+3zu(z+u)=\frac{43904+168t^2}{8}, \text{ ou}$$

$2548 + 108 \times 28 = 5488 + 21t^2$, d'où $t = \pm 2$, ce qui donne:

$x = 12; \; 3; \; 9; \; 4$
$y = 3; \; 12; \; 4; \; 9$
$z = 9; \; 4; \; 12; \; 3$
$u = 4; \; 9; \; 3; \; 12.$

144. En élevant II et III à la quatrième puissance, on obtient

$x^4 + y^4 = 2401 + 2x^2y^2 - 196xy$, et

$z^4 + u^4 = 4096 + 2z^2u^2 - 256zu$. En additionnant ces résultats, on a, à cause de I et IV:

$1649 = 6497 + 4x^2y^2 - 452xy$, d'où $xy = 101$ ou 12, ce qui donne:

$x = 4;\ 3;\ \dfrac{7 \pm \sqrt{-355}}{2};$ $\quad z = 6;\ 2;\ 4 \pm \sqrt{-85}$

$y = 3;\ 4;\ \dfrac{7 \mp \sqrt{-355}}{2};$ $\quad u = 2;\ 6;\ 4 \mp \sqrt{-85}.$

145. $x = 12;\ 4;\quad y = 4;\ 12;\quad z = 8;\ 6;\quad u = 6;\ 8.$

146. Posez $(x + y) - (z + u) = t$. Combinant cette équation avec I, on en tire : $x + y = \dfrac{21 + t}{2}$; $z + u = \dfrac{21 - t}{2}$.

Elevant ces équations à la quatrième puissance, on en tire, à cause de II et III :

$$10897 = \frac{(21 + t)^4 + (21 - t)^4}{16} - 20\{(21 + t)^2 + (21 - t)^2\} + 6400 - 4800;$$

d'où $t^2 = 9;\ -2335$, et $t = \pm 3;\ \pm\sqrt{-2335}$.

Les deux dernières valeurs de t donnent des racines imaginaires; les deux premières donnent pour les inconnues :

$x = 10;\ 2;\ 5;\ 4 \qquad z = 5;\ 4;\ 10;\ 2$

$y = 2;\ 10;\ 4;\ 5 \qquad u = 4;\ 5;\ 2;\ 10.$

147. On pose $(x + y) - (z + u) = t$, et on procède comme dans l'exemple précédent. On arrive ainsi à l'équation $t^4 + 584t^2 = 2352$, qui donne $t = \pm 2;\ \pm 14\sqrt{-3}$; d'où, pour les racines réelles :

$x = 9;\ 2;\ 6;\ 3 \qquad z = 6;\ 3;\ 9;\ 2$

$y = 2;\ 9;\ 3;\ 6 \qquad u = 3;\ 6;\ 2;\ 9.$

148. Posez $xy - zu = t$; d'où $xy = \dfrac{30 + t}{2}$; $zu = \dfrac{30 - t}{2}$.

De là on tire, au moyen de I et II :

$x = \frac{1}{2}(\sqrt{82 + t} + \sqrt{22 - t})$

$y = \frac{1}{2}(\sqrt{82 + t} - \sqrt{22 - t})$

$z = \frac{1}{2}(\sqrt{43 - t} + \sqrt{t - 17})$

$u = \frac{1}{2}(\sqrt{43 - t} - \sqrt{t - 17})$.

Remplaçant dans IV x, y, z et u par les valeurs ci-dessus, on trouve $17t^2 - 676t = -6660$; d'où $t = 18$, ou $\dfrac{370}{17}$, ce qui donne : $xy = 24$; $zu = 6$, et :

Pour $t = 18$ — Pour $t = \frac{370}{17}$.

$$x = 6;\ 4;\ -4;\ -6;\ \frac{22\sqrt{17}}{17};\ \frac{20\sqrt{17}}{17};\ -\frac{20\sqrt{17}}{17};\ -\frac{22\sqrt{17}}{17}$$

$$y = 4;\ 6;\ -6;\ -4;\ \frac{20\sqrt{17}}{17};\ \frac{22\sqrt{17}}{17};\ -\frac{22\sqrt{17}}{17};\ -\frac{20\sqrt{17}}{17}$$

$$z = 2;\ 3;\ -3;\ -2;\ \frac{14\sqrt{17}}{17};\ \frac{5\sqrt{17}}{17};\ -\frac{5\sqrt{17}}{17};\ -\frac{14\sqrt{17}}{17}$$

$$u = 3;\ 2;\ -2;\ -3;\ \frac{5\sqrt{17}}{17};\ \frac{14\sqrt{17}}{17};\ -\frac{14\sqrt{17}}{17};\ -\frac{5\sqrt{17}}{17}.$$

149. $x = 6;\ 2 \qquad y = 2;\ 6 \qquad z = 4;\ 3 \qquad u = 3;\ 4.$

XLVIII

2. Équations littérales.

1. $x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

2. $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4n^2}}{2}$, $y = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4n^2}}{2}$.

3. $x = \frac{b \pm \sqrt{2a^2-b^2}}{2}$, $y = \frac{b \mp \sqrt{2a^2-b^2}}{2}$.

4. $x = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b}}$, $y = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}$.

5. $x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$.

6. $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm 2b$.

7. $x = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8. $x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$, $y = \pm\sqrt{ab}$.

9. $x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$, $y = \frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$.

10. $x = \frac{1}{2}(b^2 \pm a\sqrt{2b^2-a^2})$, $y = \frac{1}{2}(b^2 \mp a\sqrt{2b^2-a^2})$.

11. $x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+1}}$, $y = \pm\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}$.

12. $x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3+ab(a-b)}} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)b+(a^2-b^2)a}}$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3+ab(a+b)}} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)a+(a^2-b^2)b}}.$

13. $x = \pm\dfrac{m}{\sqrt{m+n}}$ **14.** $x = \dfrac{p}{\sqrt[3]{p^2+q^2}}$ **15.** $x = \dfrac{a}{\sqrt[5]{a^4+b^4}}$

$y = \pm\dfrac{n}{\sqrt{m+n}}$ $y = \dfrac{q}{\sqrt[3]{p^2+q^2}}$ $y = \dfrac{b}{\sqrt[5]{a^4+b^4}}.$

16. $x = \dfrac{\pm\sqrt{2(3a-b)} \pm \sqrt{2(3b-a)}}{4}$ **17.** $x = \sqrt[3]{\dfrac{a+b}{2}}$

$y = \dfrac{\pm\sqrt{2(3a-b)} \mp \sqrt{2(3b-a)}}{4}.$ $y = \sqrt[3]{\dfrac{b-a}{2}}.$

18. $x = a\sqrt[4]{8}$

$y = a\sqrt[4]{5}.$

19. $x = 0;\ a(a-b)$

$y = 0;\ b(a-b).$

20. $x = \pm\dfrac{aq}{\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}}$

$y = \pm\dfrac{bq}{\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}}.$

21. $x = \pm\sqrt{\dfrac{(c+d)m-bn}{(a+b)c+ad}}$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{(a+b)n-dm}{(a+b)c+ad}}.$

22. $x = \pm\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{3a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}} + \sqrt{\dfrac{-a\mp3\sqrt{a^2-4b}}{2}}\right\}$

$y = \pm\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{3a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}} - \sqrt{\dfrac{-a\mp3\sqrt{a^2-4b}}{2}}\right\}.$

23. $x = \dfrac{2ab}{\pm\sqrt{2a^2-b^2}+b}$

$y = \dfrac{2ab}{\pm\sqrt{2a^2-b^2}-b}.$

24. $x = \dfrac{m+n}{2\sqrt[3]{n}}$

$y = \dfrac{m-n}{2\sqrt[3]{n}}.$

25. $x = \dfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{\dfrac{b^3}{a}}\right)$

$y = \dfrac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{\dfrac{b^3}{a}}\right).$

26. $x = 0;\ \dfrac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$

$y = 0;\ \dfrac{ab(a-b)}{a^2+b^2}.$

27. $x = \frac{m}{2a}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{n + abm}{n - 3abm}}\right\};$

$y = \frac{m}{2b}\left\{-1 \pm \sqrt{\frac{n + abm}{n - 3abm}}\right\}.$

28. $x = \frac{a}{2(a^4+1)}\left\{b(a^3+1) \pm \sqrt{b^2(a^3+1)^2 - 4(a^2+1)(a^4+1)}\right\}$

$y = \frac{1}{2(a^4+1)}\left\{b(a^3+1) \pm \sqrt{b^2(a^3+1)^2 - 4(a^2+1)(a^4+1)}\right\}.$

29. $x = \pm \frac{m(a+b)}{\sqrt{2(a^2+b^2)}};\quad y = \pm \frac{m(a-b)}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.$

30. On tire de I : $\frac{x}{y} = \frac{bq + dp}{cp - aq}$, et on trouve :

$$x = \pm \frac{m(bq+dp)}{\sqrt{(bq+dp)^2 + (cp-aq)^2}};$$

$$y = \mp \frac{m(cp-aq)}{\sqrt{(bq+dp)^2 + (cp-aq)^2}}.$$

31. $x = \frac{2c\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt[3]{4ab}};\quad y = \frac{2c\sqrt[3]{(a-b)^2}}{\sqrt[3]{4ab}}.$

32. On multiplie le dénominateur des deux membres de I par 2, on applique le théorème page 124, 4⁰ II, et on extrait la racine carrée ; on aura ainsi :

$$x = \frac{-3(a-b) \pm (a+b)}{6};\quad y = \frac{3(a+b) \mp (a+b)}{6}.$$

33. Divisez I par II; appliquez le même théorème que dans l'exemple précédent, vous aurez : $y = \frac{a+b}{a-b}$.

Soustrayant II de I et remplaçant y par sa valeur, on a $x = \frac{b-a}{2\sqrt[3]{ab}}$.

34. De I on tire $\frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{a+b}{2(a-b)}$; d'où :

$$\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy} = \frac{3a-b}{3b-a},\ \text{et}\ \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a}}{\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a}}.$$

$$x = \frac{c\left(\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a}\right)}{2\sqrt[6]{4b^2(3a-b)}}; \quad y = \frac{c\left(\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a}\right)}{2\sqrt[6]{4b^2(3a-b)}}.$$

35. Posez $x - y = t$ et déterminez d'abord t. On trouve ensuite :

$$x = \frac{a+b}{2}; \frac{a(b-a)}{2b}; \qquad y = \frac{a-b}{2}; \frac{a(b+a)}{2b}.$$

36. On élève I et II au carré ; on soustrait le second résultat du premier, ce qui donne $(X) 1 - 2(x+y) + 4xy = a^2 - b^2$. — Le carré de I donne $(Y)(x+y) - 2a\sqrt{xy} = 1 - a^2$. Les équations (X) et (Y) donnent $xy - a\sqrt{xy} = \frac{1-a^2-b^2}{4}$; d'où $xy = \frac{1}{4}\left(1 + a^2 - b^2 \pm 2a\sqrt{1-b^2}\right)$. De là

$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$;

$y = \frac{1}{2}\left(1 \pm a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right)$.

---

37. L'équation I donne $\frac{mx^2}{ma^2} = \frac{ny^2}{nb^2} = \frac{pz^2}{pc^2}$; d'où

$$\frac{mx^2+ny^2+pz^2}{ma^2+nb^2+pc^2} = \frac{q^2}{ma^2+nb^2+pc^2} = \frac{x^2}{a^2} \text{ etc.}$$

$$x = \pm\frac{aq}{\sqrt{ma^2+nb^2+pc^2}}; \quad y = \pm\frac{bq}{\sqrt{ma^2+nb^2+pc^2}};$$

$$z = \pm\frac{cq}{\sqrt{ma^2+nb^2+pc^2}}.$$

38. $x = \pm\frac{m}{\sqrt{3bc}}$

$y = \pm\frac{m}{\sqrt{3ac}}$

$z = \pm\frac{m}{\sqrt{3ab}}$.

39. $x = \pm\frac{am}{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}$

$y = \pm\frac{an}{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}$

$z = \pm\frac{ap}{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}$.

40. $x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$y = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$z = \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

41. $x = \pm\frac{m}{\sqrt{m+n-p}}$

$y = \pm\frac{n}{\sqrt{m+n-p}}$

$z = \pm\frac{p}{\sqrt{m+n-p}}$.

42. $x = \dfrac{ab + ac - bc}{2\sqrt{abc}}$; $\qquad y = \dfrac{ab + bc - ac}{2\sqrt{abc}}$

$z = \dfrac{ac + bc - ab}{2\sqrt{abc}}$.

43. $x = \dfrac{mn - p \pm \sqrt{(mn - p)^2 - 4n^3}}{2n}$

$y = \dfrac{mn - p \mp \sqrt{(mn - p)^2 - 4n^3}}{2n}$; $\quad z = \dfrac{p}{n}$.

44. $x = \dfrac{-(-a + b + c + 1) \pm \sqrt{(a + b + c + 1)^2 + 4abc}}{2(b + 1)}$

$y = \dfrac{-(a - b + c + 1) \pm \sqrt{(a + b + c + 1)^2 + 4abc}}{2(c + 1)}$

$z = \dfrac{-(a + b - c + 1) \pm \sqrt{(a + b + c + 1)^2 + 4abc}}{2(a + 1)}$.

45. $x = -a \pm \sqrt{\dfrac{(a^2 + m^2)(a^2 + n^2)}{a^2 + p^2}}$

$y = -a \pm \sqrt{\dfrac{(a^2 + m^2)(a^2 + p^2)}{a^2 + n^2}}$

$z = -a \pm \sqrt{\dfrac{(a^2 + n^2)(a^2 + p^2)}{a^2 + m^2}}$.

46. Mettez les équations sous la forme $(x + y - z)(x - y + z) = a$; $(x + y - z)(-x + y + z) = b$; $(x - y + z)(-x + y + z) = c$. Déterminez chaque facteur, il viendra :

$x + y - z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$; $x - y + z = \sqrt{\dfrac{ac}{b}}$; $-x + y + z = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}$; d'où

$x = \dfrac{a(b + c)}{2\sqrt{abc}}$; $\ y = \dfrac{b(a + c)}{2\sqrt{abc}}$; $\ z = \dfrac{c(a + b)}{2\sqrt{abc}}$.

47. Développez les carrés, puis retranchez III de II, il viendra :

$2x(y - z) = b - c$, d'où $y^2 + z^2 - 2yz = \dfrac{(b - c)^2}{4x^2}$; en substituant cette valeur dans I, on trouve :

$4x^4 - 4ax^2 = -(b - c)^2$. Un calcul semblable donnera y et z.

$$x = \frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - (b-c)^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a+b-c} \pm \sqrt{a-b+c})$$

$$y = \frac{\sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - (a-c)^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a+b-c} \pm \sqrt{-a+b+c})$$

$$z = \frac{\sqrt{c \pm \sqrt{c^2 - (a-b)^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a-b+c} \pm \sqrt{-a+b+c}).$$

48. Déterminez d'abord les produits xy, xz, yz.

$$x = \pm \frac{a\sqrt{30}}{2}; \quad y = \pm \frac{a\sqrt{30}}{6} \quad z = \pm \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

---

49. $x = \pm \sqrt{\frac{a - 2b + c + d}{3}}$

$$y = \pm \sqrt{\frac{a + b - 2c + d}{3}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{a + b + c - 2d}{3}}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{-2a + b + c + d}{3}}.$$

50. $x = \pm \sqrt{\frac{3abcd}{abc + abd - 2acd + bcd}}$

$$y = \pm \sqrt{\frac{3abcd}{abc - 2abd + acd + bcd}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{3abcd}{-2abc + abd + acd + bcd}}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{3abcd}{abc + abd + acd - 2bcd}}.$$

51. $x = \pm \frac{Aa}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 + d^2q^2}}$

$$y = \pm \frac{Ab}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 + d^2q^2}}$$

$$z = \pm \frac{Ac}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 + d^2q^2}}$$

$$u = \pm \frac{Ad}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 + d^2q^2}}.$$

52. $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{c^2 - b^2})$; $y = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{c^2 - a^2})$;

$z = \frac{1}{2}(b \mp \sqrt{c^2 - a^2})$; $u = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{c^2 - b^2})$.

53. Posez $(x + y) - (z + u) = t$; cette équation, combinée avec I, donne $x + y = \frac{2a + t}{2}$; $z + u = \frac{2a - t}{2}$. En élevant ces équations au carré, puis au cube, et combinant les résultats obtenus avec II et III, on trouve :

$t = \frac{2}{3a}\sqrt{3a(a^3 - 3ab + 2c)}$, et $xy = \frac{2a^3 - 3ab + c}{3a}$.

Soit pour abréger p cette valeur de xy; alors :

$$x = \frac{2a + t \pm \sqrt{(2a + t)^2 - 16p}}{4}$$

$$y = \frac{2a + t \mp \sqrt{(2a + t)^2 - 16p}}{4}$$

$$z = \frac{2a - t \pm \sqrt{(2a - t)^2 - 16p}}{4}$$

$$u = \frac{2a - t \mp \sqrt{(2a - t)^2 - 16p}}{4}.$$

54. Posez $xy - zu = t$; en combinant avec III, on a :

$2xy = p + t$; $2zu = p - t$; d'où

$z + u = \sqrt{n + p - t}$, etc., et

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{m + p + t} + \sqrt{m - p - t})$$

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{m + p + t} - \sqrt{m - p - t})$$

$$z = \frac{1}{2}(\sqrt{n + p - t} + \sqrt{n - p + t})$$

$$u = \frac{1}{2}(\sqrt{n + p - t} - \sqrt{n - p + t}).$$

En substituant ces valeurs dans IV, on trouve pour l'équation qui donne t :

$$\sqrt{(m+p+t)(n+p-t)} - \sqrt{(m-p-t)(n-p+t)} = 2q,$$

et pour t:

$$t = \frac{1}{(m-n)^2 + 4q^2}\Big[(m^2 - n^2)p$$
$$\pm 2q\sqrt{(mn + p^2 - q^2)\{(m-n)^2 + 4q^2\} - p^2(m+n)^2}\Big].$$

XLIX

VI. PROBLÈMES DONNANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

1. 14 et 8; ou — 14 et — 8.

2. 24 et 16.

3. 4 et 28; ou — 4 et — 28.

4. 15 et 9.

5. 24 et 4; ou — 24 et — 4.

6. 46 et 38.

7. 20 et 17.

8. 13 et 9.

9. 16 et — 36; ou 36 et — 16.

10. 18 et 45; ou — 19 et — 46.

11. 22 et 27. ou — 2 et — 7.

12. 4 et 9; ou — 4 et 1.

13. 11 et 17; ou — 11 et — 17.

14. 24.

15. 67.

16. 12 et 4.

17. 128 moutons 2 fr. 50 par tête.

18. 50 moutons 6 fr. 40 par tête.

19. 42 œufs à 1 fr. 20 la douz. ou 60 œufs à 84 c. la douz.

20. 48 pêches à $12\frac{1}{2}$ c. pièce ou 40 à 15 c. pièce.

21. Bleu, 60^m à 6 fr. ou 24$^m\frac{6}{11}$ à fr. $14\frac{2}{3}$;
Noir, 30^m à 16 fr. ou 65$^m\frac{5}{11}$ à fr. $7\frac{1}{3}$.

22. Roue de devant 2^m,5 roue de derrière 3^m,9.

23. 1200 hommes ration 1 kilg.

24. 1800 hommes ration $2\frac{1}{2}$ livres.

25. 28 ouvriers et 24 kilg. ou 36 ouvriers et 56 kilg.

26. Soient x le nombre d'heures que le premier tuyau mettrait à vider le bassin, et y le nombre d'heures que mettrait le second à le remplir ; le débit par heure des deux tuyaux sera respectivement $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$; comme le bassin est à moitié plein, on aura les deux équations : $12\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}$; $15\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right) = \frac{1}{2}$. D'où $x = 6$ h.; $y = 8$ h. Les solutions négatives doivent être rejetées.

27. Soient x le nombre d'heures qu'aurait mises le tuyau à vider le réservoir, y le nombre d'heures qu'aurait employées le siphon, et 1 la contenance du bassin. Le tuyau coule pendant $\frac{2y}{3}$ heures, et débitant par heure $\frac{1}{x}$, il donne passage pendant ce temps à une quantité de liquide $\frac{2y}{3x}$, ensorte qu'il reste dans le bassin $1 - \frac{2y}{3x}$. Le siphon mettra à épuiser ce reste $\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)y$ heures. Ils ont donc mis $\frac{2y}{3} + \left(1 - \frac{2y}{3x}\right)y$ heures à épuiser l'eau en coulant l'un après l'autre. S'ils avaient coulé ensemble, le tuyau n'aurait débité que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)$ et aurait mis $\frac{x}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)$ heures ; le siphon, ayant coulé pendant le même temps, de 2 heures moindre que le total ci-dessus, on a :

$$\frac{2y}{3} + \left(1 - \frac{2y}{3x}\right) y = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right) + 2. \text{ (I)}$$

Quand ils coulent ensemble, le tuyau débite $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)$, et le siphon le reste, soit $1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)$, ou $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{3x}\right)$. Ces deux quantités étant en raison inverse de x et y, on a :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)}{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{3x}\right)}{x}, \text{ ou}$$

$\frac{x}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right) = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{2y}{3x}\right)$; ou encore $\frac{2y^2}{x^2} + \frac{5y}{x} = 3$ (II).

Les équations (I) et (II) donnent $x = 6$; $y = 3$.

28. Soient x le temps total mis par la voiture, et y celui qu'a mis le train pour parcourir la distance $AB = 1$. Si pendant x heures la voiture parcourt 1, pendant 36 heures elle aura parcouru $\frac{36}{x}$, et le train, pendant 9 heures, $\frac{9}{y}$. Ainsi $\frac{36}{x}$ et $\frac{9}{y}$ sont les espaces respectifs parcourus depuis la rencontre, ce qui donne $\frac{36}{x} + \frac{9}{y} = 1$. (I) Soit m le temps écoulé entre le départ et la rencontre; $x = m + 36$; $y = m + 9$. D'où $x - y = 27$ (II). Les équations (I) et (II) donnent $x = 54$; $y = 27$.

29. Soient x la distance franchie par A, et y celle qu'a parcourue B avant la rencontre; on a d'abord $x = y + 30$. Ensuite, comme y est la distance que parcourt A en 4 jours, il a cheminé avant la rencontre $\frac{4x}{y}$ jours. Pareillement B parcourant une distance x en 9 jours a voyagé $\frac{9y}{x}$ jours avant la rencontre; d'où $\frac{4x}{y} = \frac{9y}{x}$. Ces équations donnent pour la distance entre Berne et Constance 150 kilom.

---

30. $x = 80^{m}$, $y = 39^{m}$.

31. Longueur 63^{cm}, Largeur 16^{cm}.

32. Le plus grand 28^{m}, Le plus petit 21^{m}.

33. 36^{m} et 29^{m}

34. $8^{m},3$ et $5^{m},2$.

35. 12^{m} et 36^{m}.

36. $x = \frac{9}{4}(7 \pm \sqrt{-15})$. et $y = \frac{3}{2}(9 \pm \sqrt{-15})$.

Les racines étant imaginaires, la construction du trapèze est impossible dans les conditions indiquées.

37. 63^{cm}; 16^{cm}.

38. 13^{cm}; 12^{cm}.

39. 7^{cm}; 5^{cm}.

40. 28^{cm}; 19^{cm}.

41. 13^{cm}; 11^{cm}.

---

42. ± 20; ± 12; ± 8. **43.** ± 25; ± 16; ± 15.

44. 80m; 39m; 89m. **45.** 452. **46.** 35cm; 28cm; 21cm.

47. Les trois équations que donne l'énoncé sont :

$$2xy + 2xz + 2yz = 192$$
$$x - y - z = 5$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 169.$$

La somme de I et III donne le carré de $x + y + z$. On a donc $x + y + z = \sqrt{192 + 169} = 19$. De là on tire $x = 12$; $y = 4$; $z = 3$.

48. Les trois équations sont :

$$x + y + z = 19$$
$$x^2 + x^2 + z^2 = 133$$
$$y^2 = xz.$$

Elevant I au carré, soustrayant II, et dans le reste substituant y^2 à xz, on trouve $xy + y^2 + yz = 114$, ou $y(x + y + z) = 114$; d'où $y = 6$; puis $x = 9$; $z = 4$.

49. 75; 30; 12. **50.** 864.

---

51. Chapeau 18 fr.; canne 6 fr., parapluie 12 fr.; couteau 9 fr.

52. *A*, 58 fr.; *B*, 44 fr. *C*, 62 fr.; *D*, 34 fr.

53. 8473.

54. 1er rectangle 22m sur 18m
2e » 16m sur 12m.

55. 21; 33; 7; 11. **56.** 66; 42; 11; 7.

57. Les équations sont :

$$x + y + z + u = 56$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 13832$$
$$xu = yz = 180.$$

Posez $(x + u) - (y + z) = t$. De cette équation et de I, on tire $(x + u) = \frac{56 + t}{2}$; $(y + z) = \frac{56 - t}{2}$. Elevant ces deux dernières au cube par la formule $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, additionnant les résultats, et combinant la somme avec II et III, on trouve $t = 2$. D'où $x = 20$; $y = 15$; $z = 12$; $u = 9$.

58. Le problème donne les équations :

$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u}$
$x + u = 35$
$y + z = 30.$

De I on tire $y^2 = xz$; $z^2 = yu$. En substituant dans II à x et u leurs valeurs tirées de ces deux dernières équations, on trouve $\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} = 35$, ou $y^3 + z^3 = 35yz$. Divisant par III, on obtient $y^2 - yz + z^2 = \frac{35yz}{30}$, ou $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 1 = \frac{35}{30}$, soit $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$. Cette dernière équation donne $y^2 + z^2 = \frac{13yz}{6}$; combiné avec III, ce résultat donne les valeurs cherchées,
$x = 27$; $y = 18$; $z = 12$; $u = 8$.

---

59. $x = \frac{b+1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$
$y = \frac{b-1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}.$

60. $x = a\sqrt[3]{\frac{d}{a^3+b^3}}$
$y = b\sqrt[3]{\frac{d}{a^3+b^3}}.$

61. Soient x et y les côtés du rectangle ; on trouve :
$x = \frac{1}{4}(m + \sqrt{m^2 - 16a})$; $y = \frac{1}{4}(m - \sqrt{m^2 - 16a})$.
Le problème est impossible quand on a
$16a > m^2$ ou $4\sqrt{a} > m$. La figure devient un carré quand on a $4\sqrt{a} = m$.

62. Soient x et y les côtés de l'angle droit du triangle, a la perpendiculaire abaissée du point donné sur ces côtés ; on trouve :
$x = \frac{m + \sqrt{m^2 - 2a^2}}{a}$; $y = \frac{m - \sqrt{m^2 - 2a^2}}{a}$.
Le problème est impossible quand on a
$2a^2 > m^2$ ou $a\sqrt{2} > m$.

CHAPITRE V

PROPRIÉTÉS DES RACINES. — DÉCOMPOSITION DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ

L

1. Propriétés des racines de l'équation du second degré.

1. $x^2 - 8x + 15 = 0.$ **2.** $x^2 - 10x + 21 = 0.$

3. $x^2 - 3x + 2 = 0.$ **4.** $x^2 - 25x + 136 = 0.$

5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$ **6.** $x^2 - 5x - 14 = 0.$

7. $x^2 + x - 30 = 0.$ **8.** $x^2 + 5x - 36 = 0.$

9. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 6x^2 - 7x + 2 = 0.$

10. $x^2 - \frac{19}{12}x + \frac{5}{8} = 0$, ou $24x^2 - 38x + 15 = 0.$

11. $x^2 - 12\frac{7}{8}x + 10\frac{1}{2} = 0.$ **12.** $x^2 - 3\frac{3}{5}x - \frac{8}{5} = 0.$

13. $x^2 + 6\frac{5}{8}x - \frac{21}{8} = 0.$ **14.** $x^2 + 2\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0.$

15. $x^2 - 1 = 0.$ **16.** $x^2 - 121 = 0.$

17. $x^2 + 10x + 24 = 0.$ **18.** $x^2 + 12x + 20 = 0.$

19. $x^2 + 16x + 55 = 0.$ **20.** $x^2 + 3\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0.$

21. $x^2 - 6{,}8x + 10{,}75 = 0.$ **22.** $x^2 - 2{,}9x + 1 = 0.$

23. $x^2 + 0{,}4x - 0{,}21 = 0.$ **24.** $x^2 + 3{,}1x - 41{,}82 = 0.$

25. $x^2 + 3{,}7x + 3{,}12 = 0.$ **26.** $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0.$

27. $x^2 - 4{,}25x + 1 = 0.$ **28.** $x^2 + 7\frac{1}{7}x + 1 = 0.$

29. $x^2 - 4\frac{4}{5}x - 1 = 0.$ **30.** $x^2 + 2\frac{2}{3}x - 1 = 0.$

31. $x^2 - 8x + 13 = 0.$ **32.** $x^2 - 10x + 23 = 0.$

33. $x^2 - 2x - 10 = 0.$ **34.** $x^2 - (12 + \sqrt{5})x + 22 = 0.$

35. $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})\,x + \sqrt{21} = 0.$

36. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})\,x + 2\sqrt{3} = 0.$ **37.** $x^2 - 4x + 7 = 0.$

38. $x^2 - 10x + 27 = 0.$ **39.** $x^2 - 2x + 2 = 0.$

40. $x^2 - 14x + 66 = 0.$ **41.** $x^2 - 6x + 24 = 0.$

42. $x^2 - 16x + 83 = 0.$ **43.** $x^2 - 2x\sqrt{-5} - 9 = 0.$

44. $x^2 - 2x\sqrt{-7} - 11 = 0.$ **45.** $x^2 - 2x\sqrt{-2} - 3 = 0.$

---

46. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

47. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

48. $x^2 - a(1 + a)x + a^3 = 0.$

49. $x^2 - 4(a + b)x + 3(a^2 + b^2) + 10ab = 0.$

50. $x^2 - a^2 = 0.$ **51.** $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$

52. $x^2 + (m + n)x + mn = 0.$ **53.** $x^2 - mx - 6m^2 = 0.$

54. $x^2 - (2 + m)x + 2m = 0.$

55. $6x^2 - (3a + 2)x + a = 0.$

56. $x^2 - 2a^3x + a^6 + b = 0.$

57. $x^2 - 2m^5x + m^{10} + 1 = 0.$

58. $x^2 - 2dx + d^2 + c^3 = 0.$ **59.** $x^2 + 2cx + a + c^2 = 0.$

60. $x^2 - 2px + p^2 + r^3 = 0.$ **61.** $x^2 + 4ex + 4e^2 + ab = 0.$

---

62. $x^2 - 3x - 4 = 0.$ **63.** $x^2 - 12x + 27 = 0.$

64. $x^2 - (n + 12)x + 12n = 0.$

65. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$ **66.** $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0.$

67. $x^3 - 4x^2 + 3x = 0.$ **68.** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$

69. $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0.$

70. $x^4 - 2\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x - 1 = 0.$

71. $x^4 - 7\frac{7}{12}x^3 + 16\frac{1}{6}x^2 - 7\frac{7}{12}x + 1 = 0.$

72. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

73. $x^4 - 6\frac{3}{10}x^3 + 5\frac{1}{5}x^2 + 6\frac{3}{10}x + 1 = 0.$

74. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0.$

75. $x^4 - 2\frac{1}{4}x^3 - 8\frac{1}{2}x^2 + 20\frac{1}{4}x - \frac{9}{2} = 0.$

76. $x^5 - 10\frac{1}{3}x^4 + 38\frac{1}{3}x^3 - 61\frac{2}{3}x^2 + 40\frac{2}{3}x - 8 = 0.$

77. $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0.$

LI

1. Lorsque $p^2 \geqq 4q$, ou quand $q < 0$.

2. Quand $p^2 < 4q$. 3. Lorsque $p^2 > 4q$.

4. Quand $p^2 = 4q$, et q positif.

5. Quand p est négatif et $> \sqrt{p^2 - 4q}$.

6. Quand p est positif et $> \sqrt{p^2 - 4q}$.

7. Quand p est négatif et $< \sqrt{p^2 - 4q}$.

8. Quand p est positif et $< \sqrt{p^2 - 4q}$.

9. Quand $p^2 - 4q$ est un carré parfait.

10. Quand q est négatif, les racines sont toujours réelles. Si $p^2 - 4q$ n'est pas un carré parfait, les racines sont irrationnelles.

Si l'équation a la forme $ax^2 + bx + c = 0$, il faut remplacer p par $\frac{b}{a}$, et q par $\frac{c}{a}$.

---

11. Réelles et posit. (4; 2). 12. Réelles et posit. (3; 2).

13. Réelles de signes contraires (4; — 3).

14. Réelles et négat. (— 1; — 11).

15. Réelles et négat. (— 1; — 8).

16. Réelles et négat. $(-1\,;\,-14)$.

17. Réelles $\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{29}{2}\right)$.

18. Réelles $(1\,;\,-26)$.

19. Réelles $(1\,;\,-12)$.

20. Réelles $(10\,;\,-2)$.

21. Réelles $(23\,;\,-2)$.

22. Réelles $(7\,;\,9)$.

23. Réelles et égales (8).

24. Réelles et égales (9).

25. Réelles et égales (-5).

26. Imag. $\left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-1}}{2}\right)$.

27. Imag. $\left(\frac{1}{2}(31 \pm 5\sqrt{-1})\right)$.

28. Irrat. $(1 \pm \sqrt{6})$.

29. Irrat. $(-7 \pm \sqrt{51})$.

30. Irrat. $(-3 \pm \sqrt{5})$.

31. Imag. $(-4 \pm 3\sqrt{-1})$.

---

32. Soient l'équation $x^2 + px + q = 0$, et α, β ses racines. Elle donne : (1) $\alpha + \beta = -p$; (2) $\alpha\beta = q$. Elevant (1) au carré et retranchant le double de (2), on a :
1° $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$. 2° L'équation (1) donne :
$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p^3$; d'où $\alpha^3 + \beta^3 = p(3q - p^2)$.
On pourrait trouver de même la somme des quatrièmes, cinquièmes, etc. puissances des racines.

33. 1° 626 ; 2° $-24(-75 - 576) = 15624$.

34. 1° 113 ; 2° 855.

35. 1° 3258 ; 2° 185 220.

36. 1° 185 ; 2° -2133.

37. 1° $\frac{54}{36}$; 2° $\frac{7}{8}$.

38. 1° $\dfrac{9a^4 + 2b^3m}{m^2}$; 2° $\dfrac{9a^2}{m^3}(b^3m + 3a^4)$.

---

39. Eliminez α et β entre les deux équations $m\alpha + n\beta = a$; $\alpha + \beta = -p$, puis substituez les valeurs trouvées pour α et β dans $\alpha\beta = q$, il viendra
$\alpha\beta = q = -\dfrac{(a + np)(a + mp)}{(m - n)^2}$, relation demandée. —
On tire de là : $p = \dfrac{-a(m+n) + (m-n)\sqrt{a^2 - 4mnq}}{2mn}$.

formule qui montre que la transformation de p est moins facile.

40. $q = -\frac{(20-12)(20-18)}{1} = -16$; $x^2 - 6x - 16 = 0$.

41. $q = 4$; $x^2 - 5x + 4 = 0$.

42. $q = -\frac{114}{169}$; $x^2 - x - \frac{114}{169} = 0$.

43. $q = -108$; $x^2 + 12x - 108 = 0$.

44. On a $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. Dans la nouvelle équation, le coefficient de x sera $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}$. Le terme indépendant de x sera $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$. La nouvelle équation sera donc $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, *ou* $cx^2 + bx + a = 0$.

LII

2. Décomposition du trinome du second degré en facteurs du premier degré.

1. $(x-17)(x-1)$. 2. $(x-1)(x+4)$. 3. $(x-13)(x+2)$.
4. $(x-2)(x+\frac{1}{2})$. 5. $(x+16)(x+1)$. 6. $(x-23)(x+2)$.
7. $-(x-23)(x+3)$. 8. $-(x+29)(x-1)$. 9. $-(x-1)(x+17)$.

10. $7(x+1)\left(x+\frac{1}{7}\right)$. 11. $36\left(x-\frac{11}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)$.

12. $27\left(\frac{13}{9}-x\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

13. $\left\{x - \frac{1}{2}(9+\sqrt{69})\right\}\left\{x - \frac{1}{2}(9-\sqrt{69})\right\}$.

14. $\left\{x - \frac{1}{2}(5+\sqrt{41})\right\}\left\{x - \frac{1}{2}(5-\sqrt{41})\right\}$.

15. $3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)$.

16. $(x - 3 - \sqrt{-2})(x - 3 + \sqrt{-2})$.

17. $(x + 4 - 2\sqrt{-3})(x + 4 + 2\sqrt{-3})$.

18. $(x + \sqrt{-3})\left(x - \sqrt{-3}\right)$.

---

19. $(x - 3a)(x + 2a)$. 20. $(x - a^2)(x + 2a^2)$.

21. $(x - a - b)(x - a + b)$. 22. $(x - 3a + b)(x - 3b + a)$.

23. $(x - 2m - n)(x - 2m + n)$.

24. $(x - 3a + b)(x + 2a - b)$. 25. $(x - a - \sqrt{b})(x + \sqrt{b})$.

26. $(x - c - i)(x - c + i)$. 27. $(x + m - ai)(x + m + ai)$.

28. $a\left(x - \frac{2d^2}{a}\right)\left(x - \frac{3d}{a}\right)$.

29. $4m^2\left(x - \frac{p-1}{2m}\right)\left(x - \frac{p+1}{2m}\right)$.

30. $a^4\left(x - \frac{m + 2\sqrt{-1}}{a^2}\right)\left(x - \frac{m - 2\sqrt{-1}}{a^2}\right)$.

On formera facilement les facteurs des numéros 11 à 31, paragraphe LI, au moyen des racines données ci-dessus entre parenthèses.

31. $\frac{3x-1}{x+5}$. 32. $\frac{4y-3}{y+1}$. 33. $\frac{x-7}{x+1}$. 34. $\frac{y^2-3}{y^2+1}$.

35. $\frac{x+2}{x-\sqrt{3}}$. 36. $\frac{x-2-\sqrt{-3}}{x-\sqrt{-3}}$. 37. $\frac{y-7-\sqrt{-2}}{y-1-\sqrt{-2}}$.

38. $\frac{x-4+\sqrt{-3}}{x-4} = 1 + \frac{\sqrt{-3}}{x-4}$. 39. $\frac{x+2a}{x-4a}$.

40. $\frac{x+2a-3b}{x-2a-b}$. 41. $\frac{x+a^2-2b}{x-a^2-b}$. 42. $\frac{x-a+\sqrt{-1}}{x-b+\sqrt{-1}}$.

---

43. $(x-1)(x+2)(x-3)$. 44. $(x+2)(x-3)(x-7)$.

45. $(x-2)(x-3)(x-5)$. **46.** $6(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

47. $5(x+4)\left[x-\frac{1}{10}(-7-\sqrt{109})\right]\left[x-\frac{1}{10}(-7+\sqrt{109})\right]$.

48. $4(x-2)(x+1)\left(x-\frac{3}{4}\right)$.

CHAPITRE VI

MAXIMA ET MINIMA DÉPENDANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

LIII

1. Max. $=16$ pour $x=0$. **2.** Max. $=9$ pour $x=0$.

3. Max. $=16$ pour $x=4$. **4.** Min. $=-25$ pour $x=5$.

5. Min. $=-4$ pour $x=3$. **6.** Min. $=-4$ pour $x=-\frac{1}{4}$.

7. Min. $=-4$ pour $x=\frac{2}{3}$. **8.** Min. $=-3$ pour $x=1$.

9. Min. $=-15$ pour $x=2$. **10.** Max. $=8$ pour $x=1$.

11. Min. $=14$ pour $x=2$. **12.** Max. $=4$ pour $x=2$.

13. Max. $=\frac{1}{24}$ pour $x=12$. **14.** Max. $=\frac{1}{4}$ pour $x=2$.

15. Max. $=\frac{25}{16}$ pour $x=8$.

16. Max. $=\infty$ pour $x=\pm 3$.
Min. $=2$ pour $x=0$.

17. Max. $=\infty$ pour $x=\pm 2$.
Min. $=1$ pour $x=0$.
Min. $=-1$ pour $x=\pm 2\sqrt{2}$.

18. Max. $=1$ pour $x=1$.
Min. $=-1$ pour $x=-1$.

19. Max. $=2$ pour $x=3$.
Min. $=-1$ pour $x=0$.

20. Max. $=\frac{1}{2}$ pour $x=2$.

21. Min. $=\frac{2mn}{m^2-n^2}$ pour $x=\frac{n}{m}$. **22.** Min. $=3\frac{3}{7}$ pour $x=\frac{3}{4}$.

23. Max. $= 4$ pour $x = 1$.
Min. $= 0$ pour $x = -1$.

24. Min. $= 0$ pour $x = -1$.

25. Min. $= -\frac{5}{3}$ pour $x = \pm\frac{1}{2}$.

26. Min. $= 10$ pour $x = 5$.
Max. $= -10$ pour $x = -5$.

27. Min. $= 8$ pour $x = 4$.
Max. $= -8$ pour $x = -4$.

28. Min. $= 45$ pour $x = 10$.
Max. $= 5$ pour $x = -10$.

29. Min. $= 28$ pour $x = 6\frac{1}{4}$.
Max. $= 2$ pour $x = -\frac{1}{4}$.

30. Max. $= 3$ pour $x = 2$.
Min. $= \frac{3}{2}$ ponr $x = -1$.

31. Max. $= 1$ pour $x = -\frac{1}{2}$.
Min. $= -\frac{1}{5}$ pour $x = -\frac{7}{2}$.

32. Max. $= -3$ pour $x = 1$.
Min. $= -\frac{1}{3}$ pour $x = -1$.

33. Max. $= 5{,}5$ pour $x = \frac{1}{3}$.
Min. $= 0{,}5$ pour $x = -3$.

34 Max. $= \frac{1}{7}$ pour $x = 5$.
Min. $= \frac{1}{3}$ pour $x = 3$.

35. Max. $= \frac{1}{2a}$ pour $x = a$.
Min. $= -\frac{1}{2a}$ pour $x = -a$.

36. Min. $= 4$ pour $x = 1$.
Max. $= \infty$ pour $x = 0$.

37. Min. $= 4$ pour $x = 2$.
Max. $= \infty$ poui $x = 1$.

38. Min. $= 8$ pour $x = 5$.
Max. $= \infty$ pour $x = 3$.

39. Min. $= 1$ pour $x = 2$.
Max. $= \infty$ pour $x = 1$.

40. Min. $= -(5 + 2\sqrt{6})$ pour $x = \sqrt{6}$.

41. Min. $= -3$ pour $x = 0$.
Max. $= +\infty$ pour $x = -(1 + h)$.
Min. $= -\infty$ pour $x = -(1 - h)$ (1).

---

42. On égale l'expression en x à la même expression en x_1 ; on réunit les termes à exposants égaux en isolant les facteurs communs, on divise par $x - x_1$, puis on fait $x_1 = x$. L'équation qui en résulte fournira la solution cherchée (2).

(1) h est une quantité extrêmement petite.

(2) Cela revient au fond à différentier le polynome et à égaler le résultat à zéro.

$x^3 - x^2 - 16x + 10 = x_1^3 - x_1^2 - 16x_1 + 10$;
$(x^3 - x_1^3) - (x^2 - x_1^2) - 16(x - x_1)$

Divisant par $x - x_1$, on a :
$(x^2 + xx_1 + x_1^2) - (x + x_1) - 16$;

Faisant $x_1 = x$, il vient : $3x^2 - 2x - 16$, qui donne :
Max. $= 30$ pour $x = -2$; min. $= 20\frac{22}{27}$ pour $x = \frac{8}{3}$.

43. Max. $= 3{,}1219$ pour $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$;

Min. $= 0{,}369$ pour $x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$.

44. Max. $= 19\frac{19}{27}$ pour $x = -\frac{1}{3}$; min. $= 6$ pour $x = 2$.

45. Max. $= -20\frac{1}{6}$ pour $x = 1$; min. $= -20\frac{1}{3}$ pour $x = 2$.

46.

x croissant de	y varie de
$-\infty$ à $+1$	$+\infty$ à 0
1 à 3	0 à -4 (min.)
3 à 5	-4 à 0
5 à $+\infty$	0 à $+\infty$

47.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -4	$+\infty$ à 0
-4 à $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$	0 à $-\frac{49}{2}$ (min.)
$-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ à -3	$-\frac{49}{2}$ à 0
-3 à 0	0 à 144 (max.)
0 à 3	144 à 0
3 à $\frac{5}{2}\sqrt{2}$	0 à $-\frac{49}{2}$ (min.)
$\frac{5}{2}\sqrt{2}$ à 4	$-\frac{49}{2}$ à 0
4 à $+\infty$	0 à $+\infty$.

48.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -3	$+\infty$ à 0
-3 à -2	0 à -25 (min.)
-2 à 0	-25 à -9 (max.)
0 à 2	-9 à -25 (min.)
2 à 3	-25 à 0
3 à $+\infty$	0 à $+\infty$.

49.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -1 (1)	$-\infty$ à -2 (max.)
-1 à $-h$	-2 à $-\infty$
$-h$ à $+h$	$-\infty$ à $+\infty$
$+h$ à 1	$+\infty$ à 2 (min.)
1 à ∞	2 à ∞.

50.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à 1	$+\infty$ à -2 (min.)
1 à 2	-2 à $+\infty$
2 à 3	$+\infty$ à -6 (max.)
3 à $+\infty$	-6 à $-\infty$.

51.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -7	0 à $\frac{1}{14}$ (max.)
-7 à -4	$\frac{1}{14}$ à 0
-4 à $-(\sqrt{7}+h)$	0 à $-\infty$
$-(\sqrt{7}+h)$ à $-(\sqrt{7}-h)$	$-\infty$ à $+\infty$
$-(\sqrt{7}-h)$ à -1	$+\infty$ à $\frac{1}{2}$ (min.)
-1 à $+\sqrt{7}-h$	$\frac{1}{2}$ à $+\infty$
$\sqrt{7}-h$ à $\sqrt{7}+h$	$+\infty$ à $-\infty$
$\sqrt{7}+h$ à $+\infty$	$-\infty$ à 0.

52.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -1	1 à $\frac{7}{3}$ (max.)
-1 à 0	$\frac{7}{3}$ à 1
0 à $+1$	1 à -3 (min.)
$+1$ à $+\infty$	-3 à 1.

(1) Dans les réponses 49, 51 53, 54, h désigne une quantité très petite.

53.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -2	1 à $\frac{7}{9}$ (min.)
-2 à $1-h$	$\frac{7}{9}$ à $+\infty$
$1-h$ à $1+h$	$+\infty$ à $-\infty$
$1+h$ à 2	$-\infty$ à -1 (max.)
2 à $4-h$	-1 à $-\infty$
$4-h$ à $4+h$	$-\infty$ à $+\infty$
$4+h$ à ∞	$+\infty$ à 1.

54.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -2	1 à 0
-2 à $-\sqrt{2}$	0 à $-17+12\sqrt{2}$ (min.)
$-\sqrt{2}$ à -1	$-17+12\sqrt{2}$ à 0
-1 à $+1-h$	0 à $+\infty$
$1-h$ à $1+h$	$+\infty$ à $-\infty$
$1+h$ à $+\sqrt{2}$	$-\infty$ à $-17-12\sqrt{2}$ (max.)
$+\sqrt{2}$ à $2-h$	$-17-12\sqrt{2}$ à $-\infty$
$2-h$ à $2+h$	$-\infty$ à $+\infty$
$2+h$ à $+\infty$	$+\infty$ à 1.

55.

Quand x varie de	y varie de
∞ à 2	$-\infty$ à $+\infty$
2 à 1	$+\infty$ à -2 (min.)
1 à -1	-2 à $-\frac{2}{3}$
-1 à -2	$-\frac{2}{3}$ à $+\frac{1}{4}$
-2 à $-\infty$	$+\frac{1}{4}$ à ∞.

56.

Quand x varie de	y varie de
$-\infty$ à -7	0 à $\frac{1}{14}$ (max.)
-7 à -3	$\frac{1}{14}$ à $-\frac{1}{12}$ (min.)
-3 à -1	$-\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{2}$ (max.)
-1 à $+2$	$\frac{1}{2}$ à 2
2 à 5	2 à $-\frac{1}{2}$.

LIV

Problèmes renfermant des questions de maxima et de minima.

1. Soit x une partie ; $2a - x$ est l'autre ; alors $(2a - x)x = m$; d'où $x = a$. Les parties doivent être égales.

2. Soit x la largeur ; $2a - x$ est la longueur ; $2ax - x^2 = m$, et $x = a$. Le rectangle demandé est un carré.

3. Soit x une partie ; $\frac{n}{x}$ l'autre : $x + \frac{n}{x} = m$. D'où $x = \sqrt{n}$; les facteurs sont égaux.

4. Soit x^2 une partie ; $2a - x^2$ est l'autre. Chaque partie sera égale à a.

5. Soit x une partie ; $2a - x$ est l'autre ; alors $x^2 + (2a - x)^2 = m$. Les parties sont égales chacune à a.

6. Soient x et $x + d$ les deux quantités ; $\frac{(x + d)^2}{x}$ la troisième proportionnelle. On trouve $x = d$, et $\frac{(x + d)^2}{x} = 4d$.

7. On a $a^m b^n = m^m n^n \left(\frac{a}{m}\right)^m . \left(\frac{b}{n}\right)^n$. Le fact^r $m^m n^n$ est constant. Le second membre aura une valeur maximum quand le produit $\left(\frac{a}{m}\right)^m . \left(\frac{b}{n}\right)^n$ sera max. Ce produit se décompose ainsi : $\frac{a}{m}.\frac{a}{m}.\frac{a}{m}....$ $\frac{b}{n}.\frac{b}{n}.\frac{b}{n}....$ soit $m\left(\frac{a}{m}\right)$ et $n\left(\frac{b}{n}\right)$ dont la somme $= a + b$, et il est maximum si tous les facteurs sont égaux. Il faut donc qu'on ait $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$. Ainsi a *et* b *doivent être proportionnels à leurs exposants respectifs.*

8. *Il faut que* a *et* b *soient proportionnels à leurs exposants respectifs.*

9. On doit avoir $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{d}{u}$ etc.

10. Soient [1] a, b, c, les côtés du triangle, $2p$ son périmètre. La surface est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = m$. Or p est constant; pour qu'il y ait maximum, il faut que $p - a = p - b = p - c$, c'est-à-dire $a = b = c$.

11. Soient a et b les côtés du rectangle, R le rayon du cercle. La surface du triangle est $ab = m$. Mais $a^2 + b^2 = 4R^2$, ou $a^2 + \frac{m^2}{a^2} = 4R^2$; d'où $a^2 = 2R^2 \pm \sqrt{4R^4 - m^2}$.

Il faut que le radical soit égal à zéro, ce qui donne $a = R\sqrt{2}$, et $m = R\sqrt{2} \times R\sqrt{2} = 2R^2$. La figure est donc le carré inscrit.

12. Soient a la base, h la hauteur du triangle; x la base et y la hautr du rectangle. On a : surface $xy = m$. Mais $\frac{h}{h-y} = \frac{a}{x}$, d'où $x = \frac{a(h-y)}{h}$, et $xy = \frac{(ah - ay)y}{h} = m$;

ou $ay^2 - ahy = -mh$; d'où $y = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{mh}{a}}$.

Le radical s'annulant donne $y = \frac{h}{2}$; $x = \frac{a}{2}$.

13. Soient r le rayon du cylindre et h sa hautr. On a $\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}$, d'où $r = \frac{R(H-h)}{H}$. Le volume du cylindre est

$\pi r^2 h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$. Le max. dépend uniquement des facteurs $(H-h)^2$ et h, dont la somme des premières puissances est constante. Donc il faut qu'on ait, pour que le produit soit max. : $\frac{H-h}{2} = \frac{h}{1}$; d'où $h = \frac{H}{3}$, et $r = \frac{2R}{3}$.

14. A partir de chaque angle du carré donné, et en allant dans le même sens, prenez des distances égales x, et joignez deux à deux les points consécutifs ainsi obtenus. La figure inscrite sera un carré. Soit h le côté de ce carré. On

[1] Le lecteur est prié de faire les figures.

pose : surface $h^2 = M$. Mais $h^2 = x^2 + (a - x)^2$
$= 2x^2 - 2ax + a^2 = M$. D'où $x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2M - a^2}$.
Donc, $M = \frac{a^2}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, et $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

15. Soient R le rayon de la base du cône, H sa hauteur. Le volume à rendre min. est $\frac{\pi R^2 H}{3}$. Mais $\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}$; d'où $R = \frac{Hr}{H-h}$; donc $\frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi H^3 r^2}{3(H-h)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{H^3}{(H-h)^2}$.
Le minimum ne dépend que de $\frac{H^3}{(H-h)^2}$ qu'on peut écrire

$$\frac{H^3}{H^2 - 2Hh + h^2} = \frac{1}{\frac{1}{H}\left(1 - \frac{h}{H}\right)^2} = \frac{h}{\frac{h}{H}\left(1 - \frac{h}{H}\right)^2}.$$

Les premières puissances des deux facteurs du dénominateur donnant une somme constante, leur produit est maximum quand on a : $\frac{\frac{h}{H}}{1} = \frac{1 - \frac{h}{H}}{2}$; d'où $H = 3h$, et $R = \frac{3r}{2}$.

16. Soient R le rayon du cercle, x la distance du centre à la base du triangle; $2a$ celle-ci, h la hauteur du triangle. On a :

Vol. $= 2\pi(R+x)^2 . \frac{a}{3} = m$. Mais $a^2 = R^2 - x^2$. Donc

vol. $= \frac{2\pi}{3}(R+x)\sqrt{R^2 - x^2}$. Le maximum ne dépend que des facteurs $(R+x)\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(R+x)^2(R^2 - x^2)} = \sqrt{(R+x)^3(R-x)}$. La somme $R + x + R - x$ étant constante, on a: $\frac{R+x}{3} = \frac{R-x}{1}$; d'où $x = \frac{R}{2}$, et le maximum $= \frac{50\pi R^3}{81}\sqrt{5}$. — De $x = \frac{R}{2}$, on tire $2a = R\sqrt{3}$, c'est-à-dire que le triangle est équilatéral.

17. Soient R le rayon de la sphère, r le rayon de la base du cylindre, h sa hauteur. On a $\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$; d'où $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. La surf. du cylindre $= 2\pi rh$; or 2π est const[t];

donc $rh = \text{max.} = m$; d'où $r^2 = \frac{m^2}{h^2}$, et $R^2 - \frac{h^2}{4} = \frac{m^2}{h^2}$.

De là on tire : $h^2 = 2R^2 \pm 2\sqrt{R^4 - m^2}$. Il faut que $R^4 = m^2$; alors $m = R^2$; $h = R\sqrt{2}$, et $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. La hauteur et le diamètre sont égaux au côté du carré inscrit.

18. Soient $2x$ la base du triangle, h la hauteur, R le rayon du cercle circonscrit. Surf. $xh = m$. Mais $x^2 + (h - R)^2 = R^2$; d'où $x = \sqrt{2hR - h^2}$. Donc : $h^2\,(2hR - h^2) = m^2 = h^3(2R - h)$. La somme $2R - h + h$ étant constante, on a :

$\frac{h}{3} = \frac{2R - h}{1}$; d'où $h = \frac{3R}{2}$, et $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; la base est donc $R\sqrt{3}$ = côté du triangle équilatéral.

19. On a $as = p^2$; le second segment de l'hypoténuse $= \frac{a^2}{s}$;

et l'hypotén. $x = \frac{a^2}{s} + s$. Mais $a^2 = \frac{p^4}{s^2}$; d'où $x = \frac{p^4}{s^3} + s$.

Or $\frac{p^4}{s^3} \times s^3 = p^4 = const.$ Donc pour que $\frac{p^4}{s^3} + s$ soit minimum, il faut (probl. 8) que $\frac{p^4}{s^3} = \frac{s}{3}$; d'où

$s = p\sqrt[4]{3}$. Donc $x = \frac{p^4}{s^3} + s = \frac{s}{3} + s = \frac{4s}{3} = 4p\,\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$.

C'est la valeur minimum de l'hypoténuse.

20. On a : $x + y = a$; l'hypot. $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 - 2xy}$.

Les deux manières d'exprimer la surface du triangle donnent : $\frac{xy}{2} = \frac{h\sqrt{a^2 - 2xy}}{2}$; d'où $h = \frac{xy}{\sqrt{a^2 - 2xy}}$, et

$\sqrt{a^2 - 2xy} - \frac{xy}{\sqrt{a^2 - 2xy}} = m$; d'où

$xy = \frac{1}{9}(3a^2 - m^2 \pm m\sqrt{m^2 + 3a^2})$. Remplaçant y par sa valeur $a - x$, on trouve

$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{4m^2 - 3a^2 \pm 4m\sqrt{m^2 + 3a^2}}$. Si l'on égale le rad[l] à 0, on trouve $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{a}{2}$, et $m = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Le triangle est donc isocèle.

21. Soient R le rayon de la sphère ; r le rayon de la base du cône, h la hauteur de celui-ci, D la distance du sommet au cercle de contact avec la sphère. On a : $\frac{r}{R} = \frac{h}{D}$; mais $D^2 = (h - R)^2 - R^2$; donc : $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h - R)^2 - R^2}}$; d'où $r^2 = \frac{R^2h}{h - 2R}$. Le volume du cône est $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2h^2}{h - 2R} = m$; comme $\frac{\pi}{3}$ est constant, on le supprime, et on trouve $h = \frac{m}{2R^2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4R^4} - \frac{8mR^3}{4R^4}}$. Egalant le radical à zéro, on a $m = 8R^3$; $h = 4R$, et $r = R\sqrt{2}$.

22. Soient R le rayon de la sphère, r le rayon de la base du cône, h sa hauteur, A son apothème. La surface à rendre max. est $\pi r A$, ou rA, π étant constant. Or
$r^2 = (R + x)(R - x)$; $A^2 = 2R(R + x)$; d'où
$r^2A^2 = 2R(R + x)^2(R - x)$. Or $2R$ est constant, ainsi que la somme des facteurs $R + x$ et $R - x$; donc
$\frac{R + x}{2} = R - x$; d'où $x = \frac{R}{3}$, et $h = \frac{4R}{3}$.

23. La surface du fond de la boîte est $(2a-2x)^2 = 4(a-x)^2$; le volume $4(a-x)^2x$. Le maximum de ce volume ne dépend que des facteurs $(a-x)^2$ et x, dont les premières puissances ont une somme constante, ce qui donne $\frac{a-x}{2} = \frac{x}{1}$; d'où $x = \frac{a}{3}$. Le volume maximum est donc $4\left(a - \frac{a}{3}\right)^2\frac{a}{3} = \frac{4a}{3} \times \frac{4a^2}{9} = \frac{16a^3}{27}$.

CHAPITRE VII

DES LOGARITHMES

LV

1. 0 pour tous les systèmes. **2.** 1; 2; 4; 6; 7.

3. 1; 4; 5; 6. **4.** −1; −3; −4; −5. **5.** 2; 4.

6. 2; 4; 3. **7.** 2; 3; 5. **8.** −2; −3.

9. −3; −4. **10.** 3; −3; −4.

11. *a*) indéterminé; *b*) 0. **12.** 3; 2; −4.

13. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$. **14.** $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$. **15.** $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{4}{3}$.

16. 1° base 7; 2° base 2; 3° base $\frac{3}{10}$.

LVI

1. 0,90 309. **2.** 1,86 923. **3.** 2,11 059.

4. 3,61 690. **5.** 3,30 190. **6.** 3,91 986.

7. 4,05 828. **8.** 4,00 907. **9.** 1,20 978.

10. 0,97 987. **11.** 1,26 555. **12.** 0,92 226.

13. 0,91 986. **14.** 1,39 846. **15.** 1,89 801.

16. 2,33 905.	**17.** 3,55 837.	**18.** $\bar{1}$,32 222.
19. $\bar{1}$,71 265.	**20.** $\bar{2}$,25 527.	**21.** $\bar{2}$,86 332.
22. $\bar{3}$,39 794.	**23.** $\bar{3}$,44 716.	**24.** $\bar{4}$,95 424.
25. $\bar{4}$,86 213.	**26.** $\bar{4}$,87 216.	**27.** $\bar{1}$,92 745.
28. $\bar{1}$,85 691.	**29.** 0,89 702.	**30.** 0,98 392.
31. $\bar{1}$,78 121.	**32.** $\bar{1}$,84 770.	**33.** $\bar{2}$,83 863.
34. $\bar{1}$,16 386.	**35.** $\bar{2}$ 25 693.	**36.** $\bar{2}$,31 342.
37. $\bar{1}$,44 539.		

---

38. 1,431 3638.	**39.** 3,615 8449.	**40.** 3,674 0340.
41. 4,071 5506.	**42.** 4,996 6299.	**43.** 4,556 3387.
44. 4,640 0439.	**45.** 5,714 0412.	**46.** 5,664 0108.
47. 1,503 0413.	**48.** 2,875 7620.	**49.** 2,883 0138.
50. 3,616 0447.	**51.** $\bar{1}$,881 4988.	**52.** $\bar{3}$,659 1648.
53. $\bar{4}$,858 0015.	**54.** $\bar{4}$,786 7514.	**55.** $\bar{3}$,009 4084.

---

56. 4,22 550.	**57.** 4,45 576.	**58.** 32,56 876.
59. 6,88 244.	**60.** 2,00 480.	**61.** $\bar{4}$,55 952.
62. $\bar{6}$,50 455.	**63.** $\overline{13}$,21 400.	**64.** $\bar{1}$,74 010.
65. $\overline{44}$,91 680.	**66.** $\bar{1}$,44 674.	**67.** 0,48 239.
68. 0,88 171.	**69.** 0,33 378.	**70.** 0,29 523.
71. 0,16 692.	**72.** 0,24 902.	**73.** 0,26 937.
74. 0,14 731.	**75.** 0,09 451.	**76.** $\bar{1}$,49 023.
77. $\bar{1}$,23 107.	**78.** $\bar{1}$,23 699.	**79.** $\bar{1}$,17 147.
80. $\bar{1}$,14 379.	**81.** $\bar{1}$,40 583.	**82.** $\bar{2}$,97 518.
83. $\bar{1}$,80 555.	**84.** $\bar{1}$,52 609.	**85.** $\bar{1}$,57 682.

---

86. 5,043 7236. **87.** 17,455 6737. **88.** 4,885 1667.
89. $\bar{1}$,756 2788. **90.** $\bar{3}$,816 2214. **91.** $\bar{9}$,424 5215.
92. 1,374 3226. **93.** 1,779 8933. **94.** 0,357 7623.
95. 0,166 1316. **96.** $\bar{1}$,279 5281. **97.** $\bar{1}$,265 0105.
98. $\bar{1}$,213 4549. **99.** $\bar{2}$,399 0040. **100.** $\bar{1}$,560 5171.
101. $\bar{1}$,476 0071. **102.** $\bar{1}$,424 4104. **103.** $\bar{1}$,897 5432.

LVII

1. 7. **2.** 42. **3.** 207.
4. 9 315. **5.** 624,3. **6.** 30,67.
7. 268,6. **8.** 1 346,3. **9.** 25,893.
10. 1,65 363. **11.** 5 627,57. **12.** 977,66.
13. 60,277. **14.** 4,7 447. **15.** 49 737,7.
16. 380,525. **17.** 3,0 954. **18.** 26,1 365.
19. 5 566,6. **20.** 41,227. **21.** 0,2 212.
22. 0,01 225. **23.** 0,004 506. **24.** 0,07 418.
25. 0,00 097 335. **26.** 0,083 547. **27.** 0,0 068 155.
28. 0,47 256. **29.** 0,031 994. **30.** 0,10 975.

---

31. 2 981. **32.** 41 290. **33.** 223,7.
34. 15,574. **35.** 8 072,7. **36.** 837,54.
37. 67,769. **38.** 3 981,3. **39.** 55 977.
40. 1,0 866. **41.** 206,1 872. **42.** 25,42 617.
43. 1,99 710. **44.** 18 273,96. **45.** 132 879,1.
46. 1 622,271. **47.** 3,403 018. **48.** 355,7 495.
49. 2 768,217. **50.** 46,52 885. **51.** 0,20 607.
52. 0,003 583 274. **53.** 0,000 838 554. **54.** 0,05 767 739.
55. 0,002 673 664. **56.** 0,100 093.

LVIII [1]

1. 79 616.	**2.** 96 965.	**3.** 10 764.
4. 126 990.	**5.** 147,84.	**6.** 14,93 138.
7. 35,88 264.	**8.** 24,21 709.	**9.** 98,86 843.
10. 4 782 970.	**11.** 10 070 522 000.	**12.** 2 691 325.
13. 76 875.	**14.** 2,71 765.	**15.** 27 732,04.
16. 0,000 009 420 824	**17.** 0,0 000 063 879.	
18. 11,87 434.	**19.** 16,08 032.	**20.** 3,670 507.
21. 3,487 128.	**22.** 52,22 938.	**23.** 130,879.
24. 29,3 372.	**25.** 2,324 995.	**26.** 0,1 496 105.
27. 0,44 692.	**28.** 20,28 725.	
29. 0,0 002 353 018.	**30.** 272,0 237.	**31.** 0,00 253 705.
32. 0,20 176.	**33.** 0,272 189.	**34.** 0,000 081 196.
35. 0,615 546.	**36.** 0,961 233.	**37.** 0,402 961.
38. 0,714 259.	**39.** 519 869,7.	**40.** 0,002 279 857.
41. 4,429 235.	**42.** 5,8 419.	**43.** 0,237 241.
44. 9,35 175.	**45.** —187,86.	

---

46. $\frac{1}{46656}$.	**47.** 0,846 008.	**48.** 1,18 998.
49. 0,965 863.	**50.** 2,49 772.	**51.** 0,838 532.
52. 0,564 557.	**53.** 923 521.	**54.** $-\frac{1}{24389}$.
55. 1,65 308.	**56.** 0,84 662.	**57.** —0,2 403 265.
58. 0,3 370 695.	**59.** —4,383 672.	**60.** 0,4 417 972.
61. —8,104 355.	**62.** —4,512 518.	

[1] Les exemples de ce paragraphe ont été calculés avec les tables à 7 décimales

LIX

1. $\text{Log.}_{10}\,2 = 0{,}30102\ 9995$
   $\text{Log.}\ \ 5 = 0{,}69897\ 0004$
   $\text{Log.}\ 11 = 1{,}04139\ 2685.$

2. $\text{Log.}_e\ 19 = 2{,}94443\ 8979$
   $\text{Log.}\ 23 = 3{,}13549\ 4216$
   $\text{Log.}\ 29 = 3{,}36729\ 5830$
   $\text{Log.}\ 31 = 3{,}43398\ 7204$ (1)

3. $\dfrac{1}{2{,}48490\ 66498} = 0{,}40242\ 96044.$

4. $\dfrac{1}{1{,}07918\ 124605} = 0{,}92662\ 840802.$

5. $\dfrac{1}{0{,}84509\ 804001} = 1{,}18329\ 466246.$

6. $\dfrac{1}{1{,}60943\ 791243} = 0{,}62133\ 493456.$

7. $\text{Log.}_{12}\ 54 = 1{,}60529.$
   $\text{Log.}\ 121 = 1{,}92997.$
   $\text{Log.}\ 315 = 2{,}31501.$

8. $\text{Log.}_{3,5}\ 7$ (2) $= 1{,}55329.$
   $\text{Log.}\ \ 11 = 1{,}91409.$
   $\text{Log.}\ \ 53 = 3{,}16923.$

9.
$$\text{Log.}2 = \log.\left(\frac{10}{5}\right) = \log.10 - \log.\ 5$$
$$= 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300.$$
$$\text{Log.}2{,}5 = \log.\left(\frac{10}{4}\right) = \log.10 - 2\log.2$$
$$= 1 - 0{,}6020600 = 0{,}3979400.$$
$$\text{Log.}6{,}25 = \log.\left(\frac{625}{100}\right) = 4\log.5. - 2\log.10$$
$$= 0{,}7958800.$$
$$\text{Log.}12{,}5 = \log.\left(\frac{100}{8}\right) = 2\log.10 - 3\log.2$$
$$= 1{,}0969100.$$

(1) Il faut multiplier les logarithmes vulgaires par 2,30258 5093.

(2) Le module pour passer des logarithmes vulgaires est 1,83800 539.

$$\text{Log}.0{,}032 = \log.\left(\frac{32}{1000}\right) = 5\log.2 - 3\log.10$$
$$= 1{,}5051500 - 3 = \bar{2}{,}5051500.$$

CHAPITRE VIII

DES PROGRESSIONS

1. Des progressions arithmétiques.

LX

1. $l = 55$, $s = 403$.
2. $l = 214$, $s = 1744$.
3. $l = 38$, $s = 258$.
4. $l = 414$, $s = 9729$.

5. $l = 174\frac{1}{2}$, $s = 2625$.
6. $l = 14$. $s = 200$.
7. $l = 20{,}9$, $s = 2190$.
8. $l = 10{,}2$, $s = 265$.

9. $l = 10\frac{5}{7}$, $s = 83\frac{4}{7}$.
10. $l = 26$, $s = 451$.
11. $l = 28$, $s = 364$.
12. $l = 6\frac{1}{2}$, $s = 225$.

13. $l = 73n$, $s = 1368n$.
14. $l = a + 29b$. $s = 30a + 435b$.
15. $l = 2m + 52n$, $s = 28m + 364n$.

16. $l = 5x + 42y$, $s = 75x + 315y$.
17. $l = 1 + 30m$, $s = 11 + 165m$.

---

18. $d = 3$, $s = 4446$.
19. $d = 11$, $s = 884$.
20. $d = 5$, $s = 697$.

21. $d = 4$, $s = 5100$.
22. $d = 1\frac{1}{2}$, $s = 3416$.
23. $d = \frac{3}{4}$, $s = 2757\frac{1}{4}$.

24. $d = -2$, $s = 330.$ **25.** $d = -7$, $s = 2124.$ **26.** $d = -\frac{3}{2}$, $s = 826\frac{1}{2}.$ **27.** $d = -0{,}3$, $s = 63.$

28. $d = 4h$, $s = 666h.$ **29.** $d = 7a^3$, $s = 1575a^3.$ **30.** $d = \frac{1}{2}a^3$, $s = 70b^2 + 297\frac{1}{2}a^3$

---

31. 2. **32.** 7. **33.** 3. **34.** $\frac{1}{16}$. **35.** $\frac{3}{13}$. **36.** $\frac{1}{36}$.

37. -2. **38.** -5. **39.** $-2a^2$.

---

40. $a = 2$, $s = 1661.$ **41.** $a = 18.$, $s = 5522.$ **42.** $a = 11$, $s = 1518.$ **43.** $a = 4$, $s = 4509.$

44. $a = \frac{5}{6}$, $s = 272\frac{1}{3}.$ **45.** $a = 0{,}3$, $s = 235{,}3.$ **46.** $a = 56$, $s = 680.$ **47.** $a = 184$, $s = 5713.$

48. $a = 65$, $s = 455.$ **49.** $n = 41$, $s = 6068.$ **50.** $n = 38$, $s = 6973.$ **51.** $n = 26$, $s = 604{,}5$

52. $n = 13$, $s = 286.$ **53.** $n = 37$, $s = 3293.$ **54.** $n = 94$, $s = 5463\frac{3}{4}.$ **55.** $n = 9$, $s = 0.$

---

56. $d = 1\frac{1}{2}$, $n = 36.$ **57.** $d = 0{,}9$, $n = 66.$ **58.** $d = 4$, $n = 40.$ **59.** $d = 3\frac{7}{23}$, $n = 24.$

60. $d = 5$, $n = 18.$ **61.** $d = 0{,}2$, $n = 30.$ **62.** $d = 4$, $n = 11.$ **63.** $d = -13\frac{7}{11}$, $n = 12.$

64. $d = 10$, $l = 140.$ **65.** $d = 3$, $l = 150.$ **66.** $d = 1\frac{1}{2}$, $l = 29\frac{1}{2}.$ **67.** $d = 3$, $l = 45.$

68. $d = \frac{2}{3}x$, $l = \frac{58}{3}x.$ **69.** $d = -7$, $l = -37.$ **70.** $d = -4$, $l = -16.$ **71.** $d = -5$, $l = -30.$

---

72. $a = 9$, $d = 2.$ **73.** $a = 4$, $d = 2\frac{1}{2}.$ **74.** $a = 18$, $d = 5.$ **75.** $a = 2$, $d = 9.$

76. $a = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{3}.$ **77.** $a = 17$, $d = -5.$ **78.** $a = 0$, $d = 7.$ **79.** $a = -3$, $d = 2.$

---

80. $a = 17$, $l = 97$ **81.** $a = 20$, $l = 122.$ **82.** $a = 11$, $l = 88.$ **83.** $a = \frac{1}{3}$, $l = 16\frac{2}{3}.$

84. $a = -9$, $l = 3.$ **85.** $a = -4$, $l = 8.$ **86.** $a = 11$, $l = -13.$ **87.** $a = \frac{5}{6}$, $l = -10\frac{1}{6}.$

---

88. $n = 15$, $l = 108.$ **89.** $n = 52$ (ou -92) [1], $l = 143$ (ou -145). **90.** $n = 16$, $l = 69.$

91. $n = 10$, $l = 27.$ **92.** $n = 62$, $l = 50{,}3.$ **93.** $n = 42$, $l = 130.$

94. $n = 22$ (ou -27), $l = 144$ (ou -63). **95.** $n = 26$ (ou -47), $l = 84$ (ou -84).

---

96. $n = 14$, $a = 12.$ **97.** $n = 56$, $a = 11.$ **98.** $n = 21$ (ou 24) [2], $a = 8$ (ou -4).

99. $n = 32$ (ou 41), $a = 2\frac{4}{7}$ (ou $-1\frac{5}{7}$). **100.** $n = 26$ (ou 35), $a = 7\frac{1}{2}$ (ou -6).

101. $n = 50$ (ou 69), $a = 2$ (ou $-1{,}8$). **102.** $n = 16$, $a = 315.$ **103.** $n = 103.$ $a = 1281.$

LXI

1. 20 100. **2.** 10 100. **3.** 10 000. **4.** 8 925.

(1) La solution entière négative -92 signifie que, à partir du dernier des 52 termes (143) et en comptant en descendant, vers la gauche, il y a une série de 92 termes dont la somme est aussi 4784, ce dont il est facile de s'assurer Une remarque semblable s'applique aux Nos 94 et 95.

(2) Dans les deux cas, 88 est le dernier terme, le plus élevé.

5. 6 045. **6.** 156 coups. **7.** 1 122.

8. 16 978 fr. 50. **9.** 719^{m},5. **10.** 153 chocs.

11. Non ; il payerait 10 fr. 24, au lieu de 8 fr.

12. A 3825 mètres. **13.** 3200 mètres. **14.** 406^{m},7.

15. 22 amis. **16.** 46^{sec} ; à 10 255^{m},7.

17. 4^{sec},1156. **18.** 3, 10, 17, 24, 31. **19.** 4, 11, 8.

20. 4, 7, 10, 13, 16.

22. $d=3$; -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

22. 17 910 fr. **23.** 1° 21 sec. 2° à 6 482^{m},7.

LXII

1. 819. **2.** 22 140. **3.** 51 039. **4.** 338 350.

5. 658 875. **6.** 10 468 290. **7.** 178 792 250.

8. 333 833 500. **9.** 627 121 885. **10.** 2 213 123 780.

11. 45 141. **12.** 259 486. **13.** 281 370.

14. 650 320. **15.** 2 646 275.

16. 14 400. **17.** 90 000. **18.** 608 400.

19. 6 175 225. **20.** 10 497 600. **21.** 25 502 500.

22. 13 359 025. **23.** 178 200. **24.** 1 589 525.

25. 4 236 400. **26.** 16 523 009. **27.** 396 459.

---

28. 91. **29.** 1 240. **30.** 650. **31.** 385.

32. 285. **33.** 140. **34.** 1 785. **35.** 3 311

36. 6 930.

---

37. 476. **38.** 271. **39.** 960. **40.** 1 581.

41. 2 079. **42.** 1 441. **43.** 56. **44.** 364.

45. 969. **46.** 220. **47.** 1 330. **48.** 2 925.

49. 525. **50.** 605. **51.** 1 784. **52.** 1 085.

---

53. 145. **54.** 85. **55.** 80. **56.** 600.
57. 1 547. **58.** 2 856. **59.** 2 080. **60.** 4 750.
61. 5 428. **62.** 1 030. **63.** 1 757. **64.** 912.
65. 3 490.

---

2. Des progressions géométriques.

LXIII

1. $l = 256$, $S = 508$.

2. $l = 13\,122$, $S = 19\,682$

3. $l = 4\,096$, $S = 5\,461$

4. $l = \frac{1}{6\,561}$, $S = 13\,\frac{3\,280}{6\,561}$.

5. $l = 0{,}000\,13$, $S = 14{,}44\,443$.

6. $l = \frac{7}{256}$, $S = 111\frac{249}{256}$.

7. $l = \frac{1}{512}$, $S = 1\frac{511}{512}$.

8. $l = 7{,}59\,375$, $S = 20{,}781\,250$.

9. $l = 0$, $S = 2$.

10. $l = 0$, $S = 10\frac{2}{3}$.

11. $l = 0$, $S = 2\frac{1}{3}$.

12. $l = 0$, $S = 12\frac{1}{2}$.

13. $l = 0$, $S = 1\frac{1}{3}$.

14. $l = m^3 n^6$

$$S = \frac{m^3}{n-1}(n^7 - 1).$$

15. $l = a\,(1 + x)^7$

$$S = \frac{a}{x}\left\{(1 + x)^8 - 1\right\}.$$

16. $l = \frac{a}{(a^2 - 1)^5}$

$$S = \frac{a\left\{(a^2 - 1)^{10} - 1\right\}}{(a^2 - 2)\,(a^2 - 1)^9}.$$

17. $l = \frac{b}{(1 - m)^8}$

$$S = \frac{b\left\{1 - (1 - m)^9\right\}}{m\,(1 - m)^8}.$$

18. $l = b$

$$S = \frac{b}{x}\left\{(1 + x)^n - 1\right\}.$$

19. $r = 6$

$S = 12\,440$.

20. $r = 5$
$S = 39\,062.$

21. $r = \frac{1}{3}$
$S = 53\frac{79}{81}.$

22. $r = 4$
$S = 65\,535$

23. $r = \frac{1}{4}$
$S = 63\frac{63}{64}.$

24. $r = 2$
$S = 7\,161.$

---

25. $r = 7.$ 26. $r = 3.$ 27. $r = 2.$ 28. $r = 6.$ 29. $r = \frac{2}{3}.$

30. $r = \frac{5}{2}.$ 31. $r = 2.$ 32. $r = 3.$ 33. $r = \frac{1}{5}.$

---

34. $a = 2$
$S = 254.$

35. $a = 1.$
$S = 97\,656.$

36. $a = 3$
$S = 36\,621\,093.$

37. $a = 2$
$S = 53\frac{2039}{2187}.$

38. $a = 56$
$S = 89\frac{148\,401}{262\,144}.$

39. $a = 6$
$S = 8\frac{26}{27}.$

---

40. $S = 4\,599$
$n = 9.$

41. $S = 126$
$n = 6.$

42. $S = 381(1 + \sqrt{2})$
$n = 14.$

43. $S = 80\frac{242}{243}$
$n = 9.$

44. $S = 24\frac{47}{27}$
$n = 6.$

---

45. $r = 3$
$n = 7.$

46. $r = 7$
$n = 5.$

47. $r = \frac{1}{2}$
$n = 6.$

48. $r = \frac{1}{5}$
$n = 5.$

---

49 $n = 9$
$l = 19\,683.$

50. $n = 9$
$l = 2\,048.$

51. $a = 5$
$l = 320.$

52. $a = 4$
$l = 131\,072.$

53. $a = 1$
$n = 5.$

54. $a = 2$
$n = 8.$

55. $r = 7$ ou -8
$l = 882$ ou $1152.$

LXIV

1. 239 lit.,999 999. **2.** $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. **3.** $\frac{8}{11}$.

4. Raison = 4 ou $\frac{1}{4}$; 1er terme = 3 ou 192.

5. — 871 696 100. **6.** 2 730. **7.** $6\frac{3}{4}$. **8.** 4 294 fr. 97.

9. L'avare doit . . 10 737 fr. 42 | Le mendiant doit 465 » — } Différence 10 272 fr. 42.

10. 1° 18 446 744 073 709 551 615 grains.
2° 175 683 276 892 471 fr. 92.
3° 138m,5938 de côté.

CHAPITRE IX

INTÉRÊTS COMPOSÉS ; ANNUITÉS ; AMORTISSEMENT.

---

1. Intérêts composés.

LXV

1. 3 900 fr. 48. **2.** 1 425 fr. 675. **3.** 13 823 fr. 13.
4. 1 200 fr. 26. **5.** 4 855 fr. 87. **6.** 1 076 fr. 69.
7. 35 705 fr. 48. **8.** 4 095 fr. 65. **9.** 1 377 fr. 01.
10. 540 fr. 96. **11.** 8 646 290 fr. **12.** 6 250 fr.
13. 7 fr. 27. **14.** 3 fr. 68 429. **15.** 192 359 fr. 11.
16. 124 225 fr. 88. **17.** 5 643 fr. 20. **18.** 2 353 fr. 29.
19. 3 129 fr. 29. **20.** 1 794 fr. 66. **21.** 606 fr. 77.
22. 628 fr. 52. **23.** 1 459 fr. 52. **24.** 2 464 fr. 07.
25. 2 645 fr. 03. **26.** 1° 2 368 fr. 39 ; 2° 2 377 fr. 52 ;
3° 2 382 fr. 18 ; 4° 2 385 fr. 34.

---

27. 7 800 fr. **28.** 600 fr. **29.** 1 400 fr. **30.** 2 540 fr.
31. 4 315 fr. **32.** 7 903 fr. 14. **33.** 955 fr. 025.
34. 831 fr. 04. **35.** 1 614 fr. 97. **36.** 4 862 fr. 178.

---

37. 8 ans. **38.** 30 ans. **39.** 11 ans. **40.** 50 ans.
41. $7\frac{1}{3}$ ans environ. **42.** $54\frac{1}{2}$ ans environ. **43.** 1° 23,45 ans;
2° 20,15 ans; 3° 17,67 ans; 4° $14\frac{1}{5}$ ans approx.

---

44. 4 %. **45.** $3\frac{1}{2}$ %. **46.** $4\frac{3}{4}$ %. **47.** $5\frac{1}{2}$ %.
48. $4\frac{1}{2}$ %. **49.** 3 %. **50.** 6 %.

---

51. 251 492 fr. 95. **52.** 3 984 fr. 85. **53.** 990 fr. 23.
54. 8 103 fr. 08. **55.** 220 fr. 26. **56.** 13 fr. 06.
57. 3 008 868 300 fr. approx. **58.** 25 338 fr. 62.

LXVI

1. 1 260 fr. 12. **2.** 3 916 fr. 80. [1] **3.** 21,64 %.
4. 110 fr. 28. **5.** 3 %. **6.** 67,lit.826.

7. Environ 643 ans 4 mois$\frac{1}{2}$ (4 mois 13 jours) auparavant, soit en 1233, sous la régence de Blanche de Castille, 3 ans avant que Louis IX fût déclaré majeur.

8. $\frac{(1,04)^{1880}}{10^{14} \times 3434,4 \times 19,258 \times 64}$ lieues cubes $= \frac{4\pi R^3}{3}$; d'où $R = 3902^l\,255$. En prenant 1593 lieues comme rayon moyen de la terre, on trouve que le volume de la sphère d'or vaudrait 14,699 fois le volume de la terre.

[1] Escomptez d'abord pour 3 ans, puis escomptez le résultat, en dedans pendant 3 mois.

9. 63,62 globes grands comme la terre.

10. 5068,4 ; cette sphère équivaudrait à 32,21 globes terrestres.

11. 74 272m,88.

12. Soit x l'accroissement pour cent par an ; on aura :

$$70\left(1+\frac{x-2,5}{100}\right)^{430}=660\ 000\text{ ; d'où } x=4,651\ \%.$$

13. 2 812 fr. 83. **14.** 51 280 fr. et 52 700 fr.

15. 5 097 fr. 97 et 5 490 fr. 97 **16.** 100 ans.

17. Les 35 000 fr. de *B.* escomptés au 5 % se réduisent à 30 234 fr. 31 ; les 33 000 fr. de *C.* à 31 453 fr. 52 Donc *C.* a offert 1 453 fr. 52 de plus que *A.* et 1 219 fr. 21 de plus que *B.*

LXVII

2. Annuités ; amortissement.

1. 15 251 fr. 76. **2.** 10 297 fr. 16. **3.** 5 720 fr. 64.

4. On calcule, par un compte-courant, l'intérêt simple des 52 versements de 5c faits de 7 en 7 jours dès le 7 janvier ; on trouve 5c,35, ce qui, ajouté aux versements, constitue pour chacun une annuité de fr. 2,6535. Total, au bout des 11 ans, pour les trois fr. 108,759.

5. 6 343 fr. 89. **6.** 208 fr. **7.** 20 ans. **8.** A 24 ans.

9. Les 27 annuités valent 60 267 fr. 80. La compagnie a gagné 10 267 fr. 80.

10. 8,48 ans. **11.** 23 569 fr. 63. **12.** 12 144 fr. 28.

13. 1 403 fr. 86.(1) **14.** 1 111 282 hab. **15.** 66 868 fr.

16. 76 080 fr.(2) **17.** 1 979,62 mètr. **18.** 8 151 fr. 13.

19. 32 ans. **20.** 1 214 fr. 45. **21.** 13,58 ans.

(1) Ce résultat suppose que la dernière annuité de 120 frs. est payée à la fin de la 20e année. Si les dépenses d'entretien finissent à la fin de la 19e année, le résultat est fr. 1394,71.

(2) Il dépense l'intérêt 5 400 fr., plus 1 400 fr.

22. 21,26 ans. **23.** 11 ans. **24.** 12 500 fr.
25. 4 %. **26.** 16 431 fr. 95. **27.** 20 ans.
28. 17 ans. **29.** 7 091 fr. 70. **30.** 2 400 fr.
31. 30 ans. **32.** 20 ans. **33.** 652 fr. 19.
34. 2 200 fr. 50. **35.** 1 366 fr. 72. **36.** 105 078 fr. 50.
37. 5 000 fr. **38.** Après 17,203 ans; 39 575 fr. 16.
39. 129 fr. 37.

---

40. $4\frac{1}{2}$ %. **41.** 3,68 %.

42. Dans les problèmes du genre de celui-ci, le taux se trouve par la formule de Baily, que voici :

$$r = \frac{12 - (n-1)q}{12 - 2(n-1)q} \cdot q, \text{ où } q = \left(\frac{bn}{A}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1.$$

Le résultat donné par cette formule est toujours trop grand, mais pour les taux usuels, et de 1 à 50 ans, l'erreur est très faible. Pour le cas actuel, on a :

$$q = \left(\frac{30\,000 \times 30}{503\,370{,}5}\right)^{\frac{2}{31}} - 1 = 0{,}0382;$$

$$r = \frac{12 - 29 \times 0{,}0382}{12 - 58 \times 0{,}0382} \cdot 0{,}0382 = 0{,}042525.$$

Le taux est donc $4\frac{1}{4}$ %.

43. $3\frac{1}{3}$. **44.** $4\frac{1}{2}$ environ. **45.** $3\frac{1}{2}$ % environ.

CHAPITRE X

FRACTIONS CONTINUES

LXVIII

1. $4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}.$

2. $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}.$

3. $7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$

4. $20 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}.$

5. $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{33}}}.$

6. $\cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3}}}}.$

7. $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{21}}}}.$

8. $7 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$

9. $1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2}}}}.$

10. $3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14}}}}}.$

11. $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}.$

12. $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}}}}.$

13. $4 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}.$

14. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}}$.

15. $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$.

16. $2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{42}}$.

17. $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$.

18. $\cfrac{1}{50+\cfrac{1}{2}}$.

19. $6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}}}}$.

20. $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$.

21. $9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{61+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}$.

22. $2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

23. $5+\frac{1}{14}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$. **24.** $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}$.

25. $\frac{1}{41}+\frac{1}{2}+\frac{1}{39}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$. **26.** $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

27. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$. **28.** $\frac{1}{322}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$.

29. $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a}}}.$

30. $\cfrac{1}{5m+\cfrac{1}{7m^2+\cfrac{1}{9m^3}}}.$

31. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x^2}}}}.$

32. $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{2x+\cfrac{1}{3x+\cfrac{1}{4x}}}}.$

33. $x+\cfrac{1}{x^2+\cfrac{1}{x^3+\cfrac{1}{x^4}}}.$

34. $\cfrac{1}{a^3x+\cfrac{1}{a^2x^2+\cfrac{1}{ax^3+\cfrac{1}{x^4}}}}.$

35. $2a+\cfrac{\frac{1}{2}}{(a^2+\frac{1}{4})+\cfrac{1}{(4a^3+4a)+\cfrac{1}{\frac{1}{5}a-\cfrac{\frac{6}{5}a^2+\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}}{5a^3+a+1}}}}.$

36. $m+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{m^2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{m^3}}}}.$

37. $x+1+\cfrac{1}{x+2}.$

---

38. $\frac{22}{51}$. 39. $\frac{9}{56}$. 40. $\frac{22}{179}$. 41. $\frac{5}{8}$.

42. $2\frac{36}{115}$. 43. $\frac{249}{56}$. 44. $3\frac{33}{74}$. 45. $7\frac{21}{130}$.

46. $1\frac{11}{25}$. 47. $5\frac{73}{99}$. 48. $\frac{3655}{47844}$. 49. $\frac{9307}{47844}$.

---

50. $\frac{385}{652}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.$

51. $\frac{1857}{4498}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{9}.$

52. $\frac{260}{685} = \frac{52}{137} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$

53. $\frac{8076}{14078} = \frac{4038}{7039} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{15}.$

54. $\frac{658}{767} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27} + \frac{1}{4}.$ 55. $\frac{197}{95} = 2 + \frac{1}{13} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}.$

56. $\frac{1130}{44} = \frac{565}{22} = 25 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}.$

LXIX

1. $\frac{1}{2}; \frac{3}{7}; \frac{13}{30}; \frac{68}{157}; \frac{421}{972}.$ 2. $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{5}{19}; \frac{6}{23}; \frac{35}{134}.$

3. $\frac{1}{2}; \frac{7}{15}; \frac{22}{47}; \frac{205}{438}; \frac{842}{1799}.$ 4. $\frac{1}{4}; \frac{8}{32}; \frac{129}{532}; \frac{266}{1097}; \frac{1193}{4920}.$

5. $\frac{1}{1}; \frac{3}{4}; \frac{16}{21}; \frac{115}{151}; \frac{1051}{1380}; \frac{11676}{15331}.$

6. $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{5}{12}; \frac{12}{29}; \frac{29}{70}; \frac{99}{239}.$ 7. $\frac{1}{1}; \frac{2}{3}; \frac{7}{10}; \frac{9}{13}; \frac{25}{36}; \frac{84}{121}.$

8. $\frac{1}{7}; \frac{6}{43}; \frac{43}{308}; \frac{264}{1891}; \frac{1891}{13545}; \frac{11610}{83161}.$

9. $\frac{5}{1}; \frac{11}{2}; \frac{38}{37}; \frac{87}{16}; \frac{299}{55}; \frac{685}{126}; \frac{2354}{433}.$

10. $\frac{2}{1}; \frac{9}{4}; \frac{11}{5}; \frac{53}{24}; \frac{64}{29}; \frac{309}{140}; \frac{373}{169}; \frac{1801}{816}.$

11. $\frac{4}{1}; \frac{29}{7}; \frac{149}{36}; \frac{476}{115}; \frac{3481}{841}; \frac{17881}{4320}; \frac{57124}{13801}.$

---

12. $\frac{3}{1}; \frac{4}{1}; \frac{23}{6}; \frac{27}{7}; \frac{941}{244}; \frac{968}{251}.$

13. $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{14}; \frac{4}{19}; \frac{51}{242}; \frac{463}{2197}; \frac{977}{4636}.$

14. $\frac{18}{1}$; $\frac{19}{1}$; $\frac{37}{2}$; $\frac{93}{5}$; $\frac{502}{27}$; $\frac{595}{32}$; $\frac{2882}{155}$; $\frac{6359}{342}$; $\frac{15600}{839}$.

15. $\frac{1}{1}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{28}{23}$; $\frac{67}{55}$; $\frac{296}{243}$; $\frac{363}{298}$; $\frac{659}{541}$; $\frac{1022}{839}$; $\frac{2703}{2219}$.

16. $\frac{1}{1}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{167}{130}$; $\frac{176}{137}$; $\frac{343}{267}$; $\frac{862}{671}$; $\frac{3791}{2951}$.

17. $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{21}{29}$; $\frac{34}{47}$; $\frac{463}{640}$; $\frac{1423}{1967}$; $\frac{6155}{8508}$.

18. $\frac{1}{1}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{16}{19}$; $\frac{187}{222}$; $\frac{577}{685}$; $\frac{2495}{2962}$; $\frac{10557}{12533}$; $\frac{13052}{15495}$; $\frac{36661}{43523}$.

19. $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{13}$; $\frac{817}{1770}$; $\frac{2457}{5323}$; $\frac{3274}{7093}$; $\frac{5731}{12416}$; $\frac{20467}{44341}$.

20. $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{35}$; $\frac{7}{82}$; $\frac{10}{117}$; $\frac{57}{667}$; $\frac{181}{2118}$; $\frac{962}{11257}$; $\frac{1143}{13375}$; $\frac{5534}{64757}$; etc.

21. $\frac{1}{1}$; $\frac{17}{16}$; $\frac{86}{81}$; $\frac{103}{97}$; $\frac{395}{372}$; $\frac{498}{469}$; $\frac{1889}{1779}$; $\frac{4276}{4027}$; $\frac{14717}{13860}$.

22. $\frac{3}{1}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{106}$; $\frac{355}{113}$; $\frac{86598}{27565}$; $\frac{86953}{27678}$; $\frac{173551}{55243}$.

23. $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{1}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{19}{7}$; $\frac{87}{32}$; $\frac{106}{39}$; $\frac{193}{71}$; $\frac{1264}{465}$; $\frac{1457}{536}$; etc.

24. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{10}{23}$; $\frac{33}{76}$; $\frac{43}{99}$; $\frac{76}{175}$; $\frac{271}{624}$; $\frac{1702}{3919}$; $\frac{1973}{4543}$; etc.

25. $\frac{1}{1}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{17}{13}$; $\frac{21}{16}$; $\frac{206}{157}$; $\frac{227}{173}$; $\frac{1795}{1368}$.

---

26. $1 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right|$ (*) etc. **27.** $2 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right|$ etc.

28. $3 + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right|$ etc. **29.** $3 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right|$ etc.

(*) Les termes placés entre deux barres verticales forment une période qui se répète indéfiniment.

30. $4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ etc. **31.** $5 + \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right|$ etc.

32. $6 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ etc.

33. $6 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{12}\right|$ etc.

34. $7 + \left|\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right|$ etc. **35.** $6 + \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right|$ etc. **36.** $8 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{16}\right|$ etc.

37. $9 + \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right|$ etc.

38. $17 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1}\right.$
$\left. + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{34}\right|$ etc.

39. $20 + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13}\right.$
$\left. + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{40}\right|$ etc.

40. $17 + \left|\frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{34}\right|$ etc.

41. $8 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{16}\right|$ etc.

42. $3 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right|$ etc. **43.** $6 + \left|\frac{1}{16} + \frac{1}{12}\right|$ etc.

44. $4 + \left|\frac{1}{12} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right|$ etc.

45. $1 + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right|$ etc. **46.** $1 + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1}\right|$ etc.

---

47. $-\left(\frac{1}{16} + \left|\frac{1}{1} + \frac{1}{14}\right| \text{ etc.}\right)$ **48.** $\frac{\sqrt{29} - 5}{2}$.

49. $\sqrt{5} - 2$. **50.** $\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$. **51.** $\sqrt{3}$.

52. (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **53.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **54.** $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$.

LXX

1. $\frac{\text{mètre}}{\text{yard}} = \frac{1}{1};\ \frac{11}{10};\ \frac{12}{11};\ \frac{35}{32};\ \frac{292}{267};\ \frac{5875}{5372};\ \frac{6167}{5639}.$

2. $\frac{\text{fathom}}{\text{mètre}} = \frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{9}{5};\ \frac{11}{6};\ \frac{64}{35};\ \frac{267}{146}.$

3. $\frac{\text{20 doll.}}{\text{20 fr.}} = \frac{5}{1};\ \frac{26}{5};\ \frac{57}{11};\ \frac{482}{93};\ \frac{539}{104};\ \frac{1021}{197};\ \frac{6665}{1286}.$

4. $\frac{\text{lieue}}{\text{kilom.}} = \frac{4}{1};\ \frac{9}{2};\ \frac{40}{9}.$

5. $\frac{\text{diam. éq.}}{\text{diam. pol.}} = \frac{1}{1};\ \frac{299}{298};\ \frac{1795}{1789};\ \frac{3889}{3876};\ \frac{13462}{13417}.$

6. $\frac{\text{an. trop.}}{\text{an. civile.}}\ \frac{1}{1};\ \frac{1507}{1506};\ \frac{1508}{1507};\ \frac{3015}{3013};\ \frac{4523}{4520};\ \frac{7538}{7533};\ \frac{12061}{12053}.$

7. On réduit en une fraction continue la fraction de jour 0,242 264, et on forme les réduites. Les numérateurs donnent le nombre de jours à intercaler, et les dénominateurs le nombre d'années après lesquelles se fait l'intercalation. On trouve ainsi qu'il faut ajouter au bout de

4 ans, 1 jour (calendrier julien);
29 » 7 jours (intercalation persane, introduite en 1079 après J.C.).
33 » 8 (2) »
161 » 39 »
194 » 47 »

---

(1) Les réduites consécutives des fractions continues 52 et 53 représentent la position des feuilles sur les rameaux, des écailles des cônes de sapin, etc., autour de l'axe. Si, partant du point d'insertion d'une feuille, on fait passer un fil par les points d'insertion des suivantes, jusqu'à ce qu'on arrive à une feuille exactement superposée à la première, les numérateurs indiquent le nombre des tours que fait le fil, et les dénominateurs le nombre des feuilles par lesquelles il passe, la première n'étant pas comptée.

(2) Au bout de 12 fois 33 ans, ou 396 ans, on intercalera donc $12 \times 8 = 96$ j. Ajoutons 1 jour pour 4 ans, nous aurons 97 jours à intercaler en 400 ans. C'est la règle suivie pour le calendrier grégorien.

CHAPITRE XI

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES.

LXXI

Les valeurs de l'inconnue x sont :

1. 10. **2.** 9. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 4. **6.** 7. **7.** 3. **8.** 4.

9. $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{1}{7}$. **11.** $\frac{1}{4}$. **12.** $\frac{1}{3}$. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{4}{11}$.

16. $\frac{1}{2}$. **17.** $\frac{1}{4}$. **18.** 2. **19.** 3. **20.** $1\frac{1}{2}$. **21.** 4. **22.** $\frac{1}{2}$.

23. $\frac{1}{3}$. **24.** -8. **25.** -6. **26.** -7. **27.** -5. **28.** -6.

29. -3.

---

30. 2,3219. **31.** 1,12915. **32.** 1,15314. **33.** 1,38685.
34. 1,37447. **35.** 1,544068. **36.** 0,18453. **37.** 5,41902.
38. 2,46777. **39.** −6,53018. **40.** 1,64069. **41.** 1,20871.
42. 0,27292. **43.** 0,22101. **44.** 0,44773. **45.** −0,36284.
46. 0,38211. **47.** 0,39344. **48.** 0,86088. **49.** 0,86354.
50. 0,66505. **51.** 0,60758. **52.** −2,58496. **53.** −0,13834.
54. 0,88562. **55.** 1,12607. **56.** −2,56426. **57.** −1,08027.
58. 3,27947. **59.** 2,13465. **60.** 5,16811. **61.** 8,64197.
62. 2,47709. **63.** 4,9301. **64.** 15. **65.** 11,37875.
66. −1,512. **67.** −0,752575. **68.** $-1\frac{1}{2}$. **69.** −0,56457.

---

70. 1,58496. **71.** 1,63093. **72.** 1,08764. **73.** 0,93578.
74. 0,68066. **75.** 0,583996. **76.** 1,61122. **77.** 0,83492.
78. 2,07834. **79.** 2. **80.** 0,01439. **81.** −3,495.

82. 0,25832. **83.** 2,07. **84.** 3; -2. **85.** 1; -6.
86. 4; -5. **87.** 5; -1. **88.** 3,21864. **89.** $-3{,}61091$.
90. 0,98935. **91.** $-2{,}99573$. **92.** 2,09104. **93.** 3; -2.
94. 4; -3. **95.** 1; -4. **96.** 2; -4.

97. $4^x\left(\frac{4^5-1}{4^5}\right)=341$; $x=5$. **98.** 2. **99.** -1; 3; $\frac{1}{3}$.

100. 2; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{3}$. **101.** -3; -5; 1; -1. **102.** $\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{2}$.

103. 3; $-\frac{1}{3}$.

---

104. $x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ etc. $=2{,}26185$.

105. $x=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{33}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{1}$ $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}$ etc. $=2{,}71489$.

106. $x=8+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{61}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+$ $\frac{1}{1}$ etc. $=8{,}83289$.

107. $x=3+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{38}$ etc. $=3{,}20886$.

108. $x=4+\frac{1}{22}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2}$ etc. $=4{,}043875$.

109. $x=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{28}+\frac{1}{1}+\frac{1}{14}+\frac{1}{2}+\frac{1}{23}$ etc. $=2{,}33707$.

110. $x=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{64}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}$ etc. $=2{,}749038$.

111. $x=8+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$ etc. $=8{,}4806$.

112. $x=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{13}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ etc. $=0{,}31704$.

113. $x = 3 + \frac{1}{93} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1491}$ etc. $= 3{,}010723$.

114. $x^2 - x = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} +$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ etc. $= 2{,}91727437$.
$x = 2{,}279684$ ou $-1{,}279684$.

115. $x^2 - 2x = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} = 3{,}84$
$x = 3{,}2$ ou $-1{,}2$.

CHAPITRE XII

ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES.

I. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ [1].

LXXII

1. $x = (12 - t);\ 11;\ 10;..\ 1$
$y = (t);\ 1;\ 2;..\ 11.$

2. $x = (t);\ 1;\ 2;..\ 7$
$y = (15 - 2t);\ 13;\ 11;..\ 1.$

3. $x = (t);\ 5;\ 4;..\ 1$
$y = (18 - 3t);\ 3;\ 6;..\ 15,$

4. $x = (t);\ 1;\ 2$
$y = (15 - 5t);\ 10;\ 5.$

5. $x = (t);\ 1;\ 2;\ 3$
$y = (23 - 7t);\ 16;\ 9;\ 2.$

6. $x = (t);\ 1;\ 2;..\ 5$
$y = (23 - 4t);\ 19;\ 15;..\ 3.$

7. $x = (10 - 2t);\ 8;\ 6;\ 4;\ 2$
$y = (t);\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

8. $x = (3t);\ 3;\ 6$
$y = (5 - 2t);\ 3;\ 1.$

9. $x = (5 + 4t);\ 1;\ 5$
$y = (1 - 3t);\ 4;\ 1.$

10. $x = (6 + 6t);\ 6;\ 0$
$y = (-5t);\ 0;\ 5.$

11. $x = (4 + 6t);\ 4$
$y = (2 - 5t);\ 2.$

12. $x = (11 + 7t);\ 11;\ 4$
$y = (1 - 2t);\ 1;\ 3.$

(*) Les valeurs simultanées des inconnues sont placées verticalement les unes au-dessous des autres. En donnant à t, dans la solution générale, successivement toutes les valeurs entières compatibles avec la question, on aura toutes les solutions numériques.

13. $x = (53 - 9t)$; 52; 43;.. 7
$y = (5t - 2)$; 3; 8;.. 28.

14. $x = (3 + 3t)$; 3
$y = (1 - 2t)$; 1.

15. $x = (23 + 29t)$; 23.
$y = (2 - 4t)$; 2.

16. $x = (9 + 31t)$; 9
$y = (3 - 6t)$; 3.

17. $x = (11 + 9t)$; 11; 2
$y = (1 - 4t)$; 2; 5.

18. $x = (52 + 7t)$; 52; 45;.. 3
$y = (1 - 3t)$; 1; 4;.. 22.

19. $x = (1 - 2t)$; 1; 3; 5; 7
$y = (26 + 7t)$; 26; 19; 12; 5.

20. $x = (3t - 1)$; 2; 5; 8
$y = (28 - 8t)$; 20; 12; 4.

21. $x = (2t - 1)$; 1; 3; 5; 7
$y = (47 - 11t)$; 36; 25; 14; 3.

22. $x = (1 - 5t)$; 1; 6
$y = (31 + 18t)$; 31; 13.

23. $x = (7t + 2)$; 2; 9
$y = (19 - 13t)$; 19; 6.

24. $x = (50 + 13t)$; 50; 37; 24; 11
$y = (1 - 8t)$; 1; 9; 17; 25.

25. $x = (1 - 5t)$; 1; 6;.. 26
$y = (89 + 17t)$; 89; 72;.. 4.

26. $x = (1 - 5t)$; 1
$y = (2 + 6t)$; 2.

27. $x = (3t - 1)$; 2
$y = (6 - 5t)$; 1.

28. $x = (12 + 9t)$; 12; 3
$y = (3 - 6t)$; 3; 9.

29. $x = (4t - 2)$; 2
$y = (12 - 11t)$; 1.

30. $x = (3t + 1)$; 1
$y = (2 - 5t)$; 2.

31. $x = (17 - 8t)$; 9; 1
$y = (3t)$; 3; 6.

32. $x = (5t + 2)$; 2; 7
$y = (13 - 9t)$; 13; 4.

33. $x = (2t + 1)$; 1; 3;... 15
$y = (52 - 7t)$; 52; 45;... 3.

34. $x = (7t + 2)$; 2; 9
$y = (13 - 11t)$; 13; 2.

35. $x = (815 - 7t)$; 808; 794;... 10
$y = (2t)$; 2; 6;... 230.

36. $x = (3t - 2)$; 1; 4; 7...
$y = (147 - 5t)$; 142; 137; 132...

37. $x = (63 - 9t)$; 54; 45; 36;... 9
$y = (8t)$; 8; 16; 24;... 48.

38. $x = (6t)$; 6; 12;... 198
$y = (34 - t)$; 33; 32;... 1.

39. $x = (41 - 2t);\ 39;\ 37;\ldots\ 1$
$y = (15t);\ 15;\ 30;\ldots\ 300.$

40. $x = (116 + 20t);\ 116;\ 96;\ldots\ 16$
$y = (1 - 3t);\ 1;\ 4;\ldots\ 16.$

41. $x = (6 - 12t);\ 6;\ 18;\ 30;\ldots\ 474$
$y = (40 + t);\ 40;\ 39;\ 38;\ldots\ 1.$

42. $x = (3t);\ 3;\ 6;\ldots.\ 357$
$y = (120 - t);\ 119;\ 118;\ldots.\ 1.$

43. $x = (36 - t);\ 35;\ 34;\ 33;\ldots\ 1$
$y = (3t);\ 3;\ 6;\ 9;\ldots\ 105.$

44. $x = (21 - 3t);\ 18;\ 15;\ 12;\ldots\ 3$
$y = (5t);\ 5;\ 10;\ 15;\ldots\ 30.$

45. $x = (22 + t);\ 22;\ 21;\ 20;\ldots\ 1$
$y = (1 - 2t);\ 1;\ 3;\ 5;\ldots\ 43.$

46. $x = (22 + 8t);\ 22;\ 14;\ 6$
$y = (2 - 5t);\ 2;\ 7;\ 12.$

47. $x = (88 - 7t);\ 81;\ 74;\ 67;\ldots\ 4$
$y = (3t);\ 3;\ 6;\ 9;\ldots\ 36.$

48. $x = (4t);\ 4;\ 8;\ 12;\ldots\ 108$
$y = (140 - 5t);\ 135;\ 130;\ 125;\ldots\ 5.$

49. $x = (2 - 8t);\ 2;\ 10;\ 18$
$y = (21 + 9t);\ 21;\ 12;\ 3.$

50. $x = (14t);\ 14;\ 28;\ 42;\ 56$
$y = (63 - 15t);\ 48;\ 33;\ 18;\ 3.$

51. $x = (99 + 22t);\ 99;\ 77;\ 55;\ 33;\ 11$
$y = (7 - 21t);\ 7;\ 28;\ 49;\ 70;\ 91.$

52. $x = (45t);\ 45$
$y = (28 - 14t);\ 14.$

53. $x = (5 - 10t);\ 5;\ 15;\ldots\ 55$
$y = (51 + 9t)\ 51;\ 42;\ldots\ 6.$

54. $x = (20 + 10t);\ 24;\ 14;\ 4$
$y = (2 - 3t);\ 2;\ 5;\ 8.$

55. $x = (112 - 14t);\ 98;\ 84;\ 70;\ldots\ 14$
$y = (5t);\ 5;\ 10;\ 15;\ldots\ 35.$

56. $x = (2t);\ 2;\ 4;\ 6; \ldots\ 30$
$y = (16 - t);\ 15;\ 14;\ 13; \ldots\ 1.$

57. $x = (54 - 15t);\ 39;\ 24;\ 9$
$y = (2t);\ 2;\ 4;\ 6.$

58. $x = (5t);\ 5;\ 10;\ 15$
$y = (28 - 7t);\ 21;\ 14;\ 7.$

59. $x = (13t);\ 13$
$y = (24 - 16t);\ 8.$

60. $x = (2 + 3t);\ 2$
$y = (10 - 20t);\ 10.$

61. $x = (24 - 7t);\ 17;\ 10;\ 3$
$y = (4t);\ 4;\ 8;\ 12.$

62. $x = (38 - 12t);\ 26;\ 14;\ 2$
$y = (5t - 1);\ 4;\ 9;\ 14.$

63. $x = (13 + t);\ 13;\ 12;\ 11; \ldots\ 1$
$y = (8 - 14t);\ 8;\ 22;\ 36; \ldots\ 176.$

64. $x = (3t);\ 3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15$
$y = (688 - 115t);\ 573;\ 458;\ 343;\ 228;\ 113.$

65. $x = (402 - 307t);\ 95$
$y = (9t);\ 9.$

66. $x = (14 + 369t);\ 14$
$y = (100 - 700t);\ 100.$

67. $x = (9t);\ 9;\ 18; \ldots\ 72$
$y = (1648 - 184t);\ 1464;\ 1280; \ldots\ 176.$

68. $x = (90 - 15t);\ 75;\ 60;\ 45;\ 30;\ 15$
$y = (8t);\ 8;\ 16;\ 24;\ 32;\ 40.$

69. $x = (21 + t);\ 21;\ 20; \ldots\ 1$
$y = (3 - 9t);\ 3;\ 12; \ldots\ 183.$

70. $x = (-2 - 20t);\ 18;\ 38;\ 58; \ldots\ 158$
$y = (234 + 27t);\ 207;\ 180;\ 153; \ldots\ 18.$

---

71. $x = (t + 6);\ 7;\ 8;\ 9 \ldots$
$y = (t);\ 1;\ 2;\ 3 \ldots$

72. $x = (t);\ 8;\ 9;\ 10 \ldots$
$y = (2t - 15);\ 1;\ 3;\ 5 \ldots$

73. $x = (5t + 3);\ 23;\ 28;\ 33; \ldots$
$y = (t - 3);\ 1;\ 2;\ 3; \ldots$

74. $x = (3t + 2);\ 5;\ 8;\ 11; \ldots$
$y = (2t - 1);\ 1;\ 3;\ 5; \ldots$

75. $x = (8t + 5);\ 13;\ 21;\ 29 \ldots$
$y = (5t - 2);\ 3;\ 8;\ 13 \ldots$

76. $x = (15 - 11t)$; 15; 26; 37...
$y = (2 - 4t)$; 2; 6; 10...

77. $x = (19t - 7)$; 12; 31; 50...
$y = (2t - 1)$; 1; 3; 5...

78. $x = (47t + 22)$; 22; 69; 116...
$y = (15t + 7)$; 7; 22; 37...

79. $x = (25t)$; 25; 50...
$y = (13t)$; 13; 26...

80. $x = (2t - 1)$; 1; 3; 5...
$y = (5t - 2)$; 3; 8; 13...

81. $x = (4t - 1)$; 3; 7; 11...
$y = (9t - 1)$; 8; 17; 26...

82. $x = (101t + 2)$; 2; 103; 204...
$y = (51t + 1)$; 1; 52; 103...

83. $x = (3t + 3)$; 6; 9; 12 ..
$y = (2t - 1)$; 1; 3; 5...

84. $x = (17t + 2)$; 19; 36; 53...
$y = (3t - 1)$; 2; 5; 8...

85. $x = (3t + 2)$; 5; 8; 11...
$y = (2t)$; 2; 4; 6...

86. $x = (4t + 4)$; 8; 12; 16...
$y = (3t - 1)$; 2; 5; 8...

87. $x = (16t + 5)$; 5; 21; 37...
$y = (9t + 4)$; 4; 13; 22...

88. $x = (1 + 12t)$; 13; 25; 37...
$y = (7t)$; 7; 14; 21...

89. $x = (38t - 7)$; 31; 69; 107...
$y = (11t - 3)$; 8; 19; 30...

90. $x = (15t + 20)$; 20; 35; 50...
$y = (13t + 4)$; 4; 17; 30...

91. $x = (13t + 4)$; 4; 17; 30...
$y = (6t + 3)$; 3; 9; 15...

92. $x = (2t)$; 2; 4; 6...
$y = (3t + 4)$; 7; 10; 13...

93. $x = (1 - 6t)$; 1; 7; 13...
$y = (4 - 35t)$; 4; 39; 74...

94. $x = (23t - 7)$; 16; 39; 62...
$y = (94t - 29)$; 65; 159; 253...

95. $x = (28t)$; 28; 56; 84...
$y = (55t - 2)$; 53; 108; 163...

96. $x = (4t - 1)$; 7; 11; 15...
$y = (15t - 21)$; 9; 24; 39...

97. $x = (2 - 5t)$; 2; 7; 12..
$y = (3 - 12t)$; 3; 15; 27..

98. $x = (1 - 4t);\ 1;\ 5;\ 9\ldots$
$y = (1 - 15t);\ 1;\ 16;\ 31\ldots$

99. $x = (1 - 7t);\ 1;\ 8;\ 15\ldots$
$y = (2 - 27t);\ 2;\ 29;\ 56\ldots$

100. $x = (4 - 9t);\ 4;\ 13;\ 22\ldots$
$y = (13 - 35t);\ 13;\ 48;\ 83\ldots$

101. $x = (7 - 12t);\ 7;\ 19;\ 31\ldots$
$y = (25 - 47t);\ 25;\ 72;\ 119\ldots$

102. $x = (14t + 1);\ 1;\ 15;\ 29\ldots$
$y = (37t + 1);\ 1;\ 38;\ 75\ldots$

103. $x = (37 - 14t);\ 37;\ 51;\ 65\ldots$
$y = (3 - 15t);\ 3;\ 18;\ 33,\ldots$

104. $x = (51t - 2);\ 49;\ 100;\ 151\ldots$
$y = (20t - 9);\ 11;\ 31;\ 51\ldots$

105. $x = (250t + 5);\ 255;\ 505;\ 755\ldots$
$y = (67t - 9);\ 58;\ 125;\ 192\ldots$

106. $x = (53t - 112);\ 47;\ 100;\ 153\ldots$
$y = (12t - 2);\ 34;\ 46;\ 58\ldots$

---

107. $x = -(8t + 16);\ -16;\ -8$
$y = (3t - 1);\ -1;\ -4.$

108. $x = (17t + 15);\ -2;\ -19;\ -36\ldots$
$y = (5t + 2);\ -3;\ -8;\ -13\ldots$

109. $x = (4t - 3);\ -11;\ -15;\ -19\ldots$
$y = (9t + 10);\ -8;\ -17;\ -26\ldots$

110. $x = (17t - 10);\ -27;\ -44;\ -61\ldots$
$y = (7t + 1);\ -6;\ -13;\ -20\ldots$

111. $x = (-19t - 6);\ -6$
$y = (13t - 1);\ -1.$

112. $x = (10t + 62);\ -8;\ -18;\ -28\ldots$
$y = (9t - 1);\ -64;\ -73;\ -82\ldots$

113. $x = (7t - 1);\ -1$
$y = (6 - 15t);\ -9.$

114. $x = (2t - 1);\ -17;\ -19;\ -21\ldots$
$y = (3t + 21);\ -3;\ -6;\ -9\ldots$

115. $x = (125t - 145); -270; -395; -520\ldots$
$y = (48t + 12); -36; -84; -132\ldots$

116. $x = (64t + 18); -174; -238; -302\ldots$
$y = (99t + 253); -44; -143; -242\ldots$

117. $x = (9t + 1); -8; -17; -26\ldots$
$y = (250t - 115); -365; -615; -865\ldots$

118. $x = (39t - 3); -3; -42; -81\ldots$
$y = (17t - 2); -2; -19; -36\ldots$

119. $x = (130t + 55); -75; -205; -335\ldots$
$y = (119t + 56); -63; -182; -301\ldots$

120. $x = (59 - 113t); -54; -167; -280\ldots$
$y = (8 - 36t); -28; -64; -100\ldots$

121. $x = (79t - 33); -33; -112; -191\ldots$
$y = (795t - 315); -315; -1110; -1905\ldots$

122. $x = (-13t - 21); -8$
$y = (7t + 3); -4.$

---

123. $x = (t - 9); -8; -7\ldots \mid -10; -11\ldots$
$y = (3t); 3; 6\ldots \mid -3; -6\ldots$

124. $x = (3t); 3; 6; 9\ldots \mid -3; -6; -9\ldots$
$y = (14 - 5t); 9; 4; -1\ldots \mid 19; 24; 29\ldots$

125. $x = (39t + 9); 9; 48; 87.. \mid -30; -69; -108..$
$y = -(41t + 24); -24; -65; -106.. \mid 17; 58; 99..$

126. $x = (50 + 11t); 50; 61; 72\ldots \mid 39; 28; 17\ldots$
$y = (1 - 7t); 1; -6; -13\ldots \mid 8; 15; 22\ldots$

127. $x = (30 - 67t); 30; 97; 164.. \mid 30; -37; -104..$
$y = (91t - 33); -33; -124; -215.. \mid -33; 58; 149..$

128. $x = (14 + 7t); 14; 21; 28\ldots \mid 7; 0; -7\ldots$
$y = (1 - 2t); 1; -1; -3\ldots \mid 3; 5; 7\ldots$

129. 130. 131. Insolubles en nombres entiers.

132. $x = (1 - 5t); -4; -9; -14\ldots \mid 6; 11\ldots$
$y = (4t); 4; 8; 12\ldots \mid -4; -8\ldots$

133. Insoluble.

134.

$x =$	(3*t*); 3; 6; 9...	— 3; — 6; 9..
$y =$	(*t* — 18); — 15; — 16; — 15...	— 19; — 20; — 21..

135.

$x =$	1; 1; 1; 1; 1	2; 2; 2; 2	3; 3; 3	4; 4	5
$y =$	1; 2; 3; 4; 5	1; 2; 3; 4	1; 2; 3	1; 2	1
$z =$	5; 4; 3; 2; 1	4; 3; 2; 1	3; 2; 1	2; 1	1.

136.

$x =$ 5; 2; 6; 3; 4; 1; 5; 3; 4; 2; 3; 1; 2
$y =$ 2; 4; 1; 3; 2; 4; 1; 2; 1; 2; 1; 2; 1
$z =$ 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

137.

$x =$	1; 1; 1; 1	2; 2; 2	3; 3; 3	4; 5
$y =$	12; 9; 6; 3	8; 5; 2	7; 4; 1	3; 2
$z =$	1; 3; 5; 7	2; 4; 6	1; 3; 5	2; 1.

138.

$x =$	1; 1; 1..	2; 2; 2..	3; 3; 3..	4; 4; 4..	5; 5..	etc.
$y =$	11; 12; 13..	11; 12; 13..	11; 12; 13..	10; 11; 12..	10; 11..	
$z =$	1; 6; 11..	3; 8; 13..	5; 10; 15..	2; 7; 12.	4; 9..	

139.

$x =$ 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 15; 16; 21.
$y =$ 2; 5; 3; 1; 4; 2; 3; 1; 4; 2; 3; 1; 2; 3; 1; 2; 1; 2; 1
$z =$ 6; 1; 4; 7; 2; 5; 3; 6; 1; 4; 2; 5; 3; 1; 4; 2; 3; 1; 1.

140.

$x =$ 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 9
$y =$ 7; 16; 3; 12; 8; 4; 13; 9; 5; 1; 6; 2
$z =$ 6; 2; 7; 3; 4; 5; 1; 2; 3; 4; 1; 2.

141.

$x =$	1; 1; 1..	2; 2; 2..	3; 3; 3..	4; 4; 4..	5; 5; 5..	etc.
$y =$	9; 22; 35..	7; 20; 33..	5; 18; 31..	3; 16; 29..	1; 14; 27..	»
$z =$	8; 10; 12..	7; 9; 11..	6; 8; 10..	5; 7; 9..	4; 6; 8..	»

142.

$x =$ 1; 2
$y =$ 1; 3
$z =$ 4; 2.

143.

$x =$ 1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 13; 14
$y =$ 1; 10; 8; 6; 4; 2; 9; 7; 5; 3; 1; 4; 2
$z =$ 10; 3; 4; 5; 6; 7; 1; 2; 3; 4; 5; 1; 2.

144.

$x =$ 1; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9
$y =$ 1; 9; 7; 5; 3; 1; 5; 3; 1
$z =$ 15; 2; 4; 6; 8; 10; 1; 3; 5.

145.

$x =$	1; 1; 1...	2; 2; 2...	3; 3; 3...	4; 4; 4...	5; 5; 5... etc.
$y =$	5; 10; 15...	6; 11; 16...	7; 12; 17...	8; 13; 18...	4; 9; 14... »
$z =$	8; 26; 44...	11; 19; 47...	14; 32; 50...	17; 35; 53...	2; 20; 38... »

146.

$x =$	2; 3; 4; 5	6; 6	7; 7; 7	8; 8; 8	etc.
$y =$	2; 1; 5; 4	3; 8	2; 7; 12	1; 6; 11	
$z =$	2; 6; 3; 7	11; 4	15; 8; 1	19; 12; 5	

147. $x = 1; 2; 3$
$y = 6; 5; 4$
$z = 5; 3; 1.$

148. $x = 1; 2; 3; 4; 5; 6$
$y = 8; 7; 6; 5; 4; 3$
$z = 6; 5; 4; 3; 2; 1.$

149. $x = 1; 2; 3; 4; 5$
$y = 1; 2; 3; 4; 5$
$z = 5; 4; 3; 2; 1.$

150. $x = 2$
$y = 3$
$z = 4.$

151. $x = 4$
$y = 5$
$z = 2.$

152. $x = 2$
$y = 8$
$z = 3.$

153. $x = 7$
$y = 2$
$z = 2.$

154. $x = (2t); 14; 16; 18$
$y = (29t - 186); 17; 46; 75$ etc.
$z = (11t - 64); 13; 24; 35$

155. $x = (2t); 2; 4; 6$
$y = (4 - t); 3; 2; 1$
$z = 1; 1; 1; 1$
$u = (2 + 2t); 4; 6; 8.$

156. $x = (t - 2); 1; 2; 3; 4$
$y = (t - 1); 2; 3; 4; 5$
$z = (7 - t); 4; 3; 2; 1$
$u = (t); 3; 4; 5; 6.$

157. $x = (13 - 3t)); 10; 7; 4$
$y = (2t); 2; 4; 6$
$z = (3 + t); 4; 5; 6$
$u = (4 - t); 3; 2; 1.$

158. $x = (44t - 36); 8$
$y = (3t); 3$
$z = (25t - 20); 5$
$u = (18 - 17t); 1.$

LXXIII

Problèmes donnant des équations indéterminées du premier degré.

1. $x = (167 - 17t) = 150; 133; 116; 99; 82; 65, 48; 31; 14$
$y = (7t - 2) = 5; 12; 19; 26; 33; 40; 47; 54; 61.$

2. $x = (17t - 3) = 14; 31; 48; 65; 82$
$y = (8t - 2) = 6; 14; 22; 30; 38.$

3. $x = (15t - 9) = 6; 21; 36; 51; 66$
$y = (7t - 5) = 2; 9; 16; 23; 30.$

4. $x = 4(5t + 1) = 4; 24; 44; 64...$
$y = 5(4t + 2) = 10; 30; 50; 70...$

5. $x = 3(27 + 8t) = 81; 57; 33; 9$
$y = 8(1 - 3t) = 8; 32; 56; 80.$

6. $x = 11(24 + 13t) = 264; 121$
$y = 13(4 - 11t) = 52; 195.$

7. $x = 7(20 - 11t) = 63$
$y = 11(7t - 2) = 55.$

8. Nombre $= 5x + 4 = 7y + 4$; d'où $5x = 7y$
$x = y = 35t$; Nombre $= 39$;

9. 15; 71; 127; 183; 239, etc.

10. Premier nombre : 213; 301; 389...
Deuxième nombre : 62; 150; 238...

11. Première partie : 303; 240; 177; 114; 51
Deuxième partie : 49; 112; 175; 238; 301.

12. Soient x et y les numérateurs respectifs $\left(\frac{x}{24} + \frac{y}{16}\right)$

$x = (19 - 3t) = 16; 13; 10; 7; 4; 1$
$y = (2t) = 2; 4; 6; 8; 10; 12.$

13. $\frac{x}{11} - \frac{y}{13} = \frac{82}{143}$. $x = (11t - 3) = 8; 19; 30; 41...$
$y = (13t - 11) = 2; 15; 28; 41...$

14. Pièces de 5 fr. $= (1 - 2t) = 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17$
Pièces de 2 fr. $= (41 + 5t) = 41; 36; 31; 26; 21; 16; 11; 6; 1.$

15. Oies $= (3t)$; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21
Poulets $= (38 - 5t)$; 33; 28; 23; 18; 13; 8; 3.

16. Lièvres $= (3 - 7t)$; 3; 10
Perdrix $= (39 + 29t)$; 39; 10.

17. Pièces de 5 francs $= (23t - 14)$; 9
Pièces de 1 franc $= (66 - 37t)$; 29.

18. Souv. $=$ $(20t)$; 20; 40; 60...
20 cent. $= (2521t - 1585)$; 936; 3457; 5978...

19. Pièces de 1 marc $=$ $(50t) = 850$; 900; 950; 1000...
Pièces de 50 cent. $= (123t - 2000) =$ 91; 214; 337; 460...

20. Poids de 30 gr. $=$ t; 1; 2; 3; 4; 5...
Poids de $2\frac{1}{2}$ gr. $= (400 - 12t)$; 388; 376; 364; 352; 340...

21. Pièces de 1 fr. $= (2 - 18t) = 2$
Pièc. de 50 cent. $= (3 + 23t) = 3$ } 3 fr. 50

22. $x = (11 + 62t) = 11$ gr. pers.
$y = (6 - 143t) = 6$ enf.

23. 334 poires. (¹)

24. $x = (41 + 7t) = 41$; 34; 27; 20; 13; 6 mèt. indienne
$y = (1 - 5t) = 1$; 6: 11; 16; 21; 26 mèt. orléans.

25. Premier 5 fr.; second 4 fr.

26. 41 pêches; 8 douz. de pommes.

27. 22 ans (né en 1858). **28.** Né en 1786, et il avait 22 ans.

29. Kil. café 1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8
» thé 2; 6; 3; 4; 1; 2; 3; 1
» sucre 30; 5; 20; 10; 25; 15; 5; 10.

30. Le nombre peut être exprimé de ces trois manières :
$2x + 1$; $3y + 2$; $7z + 5$;
d'où $2x + 1 = 3y + 2 = 7z + 5$, ce qui donne :
$x = (21t + 2) = 23$; 44; 65; 86...
$y = (14t + 1) = 15$; 29; 43; 57...
$z = (6t) = 6$; 12; 18; 24...

Les valeurs simultanées des trois inconnues donnent la même valeur pour le nombre; on trouve pour réponses 47; 89; 131; 173; 215, etc.

31. 503; 1007; 1511; 2015, etc.

32. Dinde 7 fr.; chapon 4 fr.; poulet 3 fr. **33.** 10; 45; 56.

(¹) Dans l'énoncé, il faut lire : si on les partageait également entre 13 enfants, il en resterait 9, mais il resterait 4 poires si on les distribuait entre 15 enfants.

LXXIV

II. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ.

1. Ecrivez : $y(x-1) = 43 - x$, d'où $y = \frac{43-x}{x-1}$. En donnant à x toutes les valeurs entières, et conservant de même pour y les valeurs entières seulement, on aura :

$x = -1;\ -2;\ -5;\ -6;\ -13;\ -20;\ -41;\ 22;\ 15;\ 8;$
$y = -22;\ -15;\ -8;\ -7;\ -4;\ -3;\ -2;\ 1;\ 2;\ 5;$
$7;\ 4;\ 3;\ 2.$
$6;\ 13;\ 20;\ 41.$

Les exemples 2 à 17 se résolvent par un procédé semblable.

2. $x = \frac{202+2y}{8y+3}$; $x = -40;\ 6;\ 2$
$y = -1;\ 4;\ 14.$

3. $x = \frac{15y+17}{2y-1} = 7 + \frac{y+24}{2y-1}$. Toutes les valeurs de y qui donnent à $\frac{y+24}{2y-1}$ une valeur entière fournissent une solution.

$x = 7;\ 4;\ 32;\ 11;\ 8$
$y = -24;\ -3;\ 1;\ 4,\ 25.$

4. $x = 1 + \frac{3y+76}{4y-5}$. $x = -78;\ 9;\ 2$
$y = 1;\ 4;\ 81$.

5. $x = -26;\ -26;\ 5;\ 2$
$y = -5;\ -1;\ 4;\ 13.$

6. $x = 11;\ -6;\ 3$
$y = -1;\ -2;\ 7.$

7. $x = -67;\ -17;\ -7;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 3;\ 8;\ 13;\ 33$
$y = -45;\ -12;\ -6;\ -5;\ -6;\ -12;\ 6;\ 4;\ 6;\ 9;\ 22.$

8. $x = -37;\ -6;\ -2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 25;\ 118$
$y = -9;\ -2;\ -2;\ -9;\ 30;\ 7;\ 7;\ 30.$

9. $x = 8;\ -1;\ -40;\ 8;\ -40$
$y = -23;\ -5,\ 1;\ 3;\ 99.$

10. $x = -25; -18; -16; -18; -25; \quad 9; \quad 2; 2; 9$
$y = -21; -13; -9; -7; -6; -4; -3; 3; 11.$

11. $x = -12; -6; -6; -12; 4; 4; 10$
$y = -11; -4; -2; -1; 1; 3; 10.$

12. $x = \pm 22; \pm 6; \pm 2; \mp 2; \mp 6; \mp 22...$
$y = \pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 9; \pm 15; \pm 45...$

13. $x = m^2 - 7 = -7; -6; -3; 2; 9; 18$ etc.

14. $x = m^2 + 3 = 3; 4; 7; 12; 19; 28$ etc.

15. $x = \dfrac{3m^2 - 2}{3} = -\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{10}{3}; \dfrac{25}{3}; \dfrac{46}{3}$ etc.

16. $x = \dfrac{5m^2 + 4}{5} = \dfrac{4}{5}; \dfrac{9}{5}; \dfrac{24}{5}; \dfrac{49}{5}; \dfrac{84}{5}$ etc.

17. $x = m^2 - 0{,}3 = -0{,}3; 0{,}7; 3{,}7; 8{,}7; 15{,}7$ etc.

---

18. Quand le terme en x^2 est un carré parfait, la quantité donnée peut être considérée comme le carré d'un binome dont le premier terme est la racine carrée de ce même terme en x^2. On pose donc :

$$4x^2 + 5x - 3 = \left(2x + \frac{m}{n}\right)^2; \text{ d'où } x = \frac{m^2 + 3n^2}{5n^2 - 4mn}.$$

En donnant successivement à m et n toutes les valeurs entières, on trouvera celles de x qui satisfont à la question. [1]

$$x = 4; \frac{13}{12}; \frac{28}{33}; \frac{49}{64}; -\frac{7}{3}; \frac{31}{21}; \frac{79}{85}; \frac{151}{189} \text{ etc.}$$

19. $x = \dfrac{m^2 + 8n^2}{2n^2 - 2mn} = \dfrac{33}{4}; \dfrac{73}{12}; \dfrac{43}{8}; \dfrac{201}{40}; -6; \dfrac{38}{3}; \dfrac{34}{5}; \dfrac{198}{35}$ etc.

20. $x = \dfrac{4n^2 - m^2}{n^2 + 2mn} = 1; \dfrac{15}{8}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{21}{8}; \dfrac{32}{21}; \dfrac{32}{15}; \dfrac{192}{77};$
$\dfrac{320}{117}$ etc.

[1] Dans les exemples **18** à **45**, les substitutions ont été faites dans l'ordre suivant : pour les quatre premières réponses, $m = 1$; pour les quatre dernières, $m = 2$. Pour n, on a pris successivement 1, 2, 3, 4 etc. Les solutions qui se répètent ont été omises, ainsi que les solutions infinies.

21. $x = -\frac{m^2 + n^2}{3(n^2 + 2mn)} = -\frac{2}{9}; -\frac{5}{24}; -\frac{17}{72}; -\frac{26}{105}; -\frac{1}{3};$
$-\frac{13}{63}; -\frac{29}{135}; -\frac{53}{231}$ etc.

22. $x = \frac{n^2 - m^2}{4mn} = \frac{3}{8}; \frac{2}{3}; \frac{15}{16}; \frac{6}{5}; -\frac{3}{8}; \frac{5}{24}; \frac{21}{40}; \frac{45}{56}$ etc.

23. $x = -\frac{m^2 + n^2}{8mn} = \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{5}{16}; \pm\frac{5}{12}; \pm\frac{17}{32}; \pm\frac{13}{48};$
$\pm\frac{29}{80}; \pm\frac{53}{112}; \pm\frac{85}{144}$ etc.

24. $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn} = 0; \pm\frac{3}{4}; \pm\frac{4}{3}; \pm\frac{15}{8}; \pm\frac{5}{12}; \pm\frac{21}{20};$
$\pm\frac{45}{28}; \pm\frac{77}{36}$ etc.

25. $x = \frac{m^2 - n^2}{n^2 - 2mn} = 0; -\frac{8}{3}; -\frac{15}{8}; -\frac{8}{5}; -1; \frac{5}{3}; -\frac{21}{5};$
$-\frac{15}{7}$ etc.

26. $x = \frac{m^2 + n^2}{n(2m - n)} = 2; -\frac{10}{3}; -\frac{17}{8}; -\frac{26}{15}; \frac{5}{3}; \frac{13}{3};$
$-\frac{29}{5}; -\frac{53}{21}$ etc.

27. $x = \frac{m^2 - n^2}{3n^2} = 0; -\frac{1}{4}; -\frac{8}{27}; -\frac{5}{16}; 1; -\frac{5}{27};$
$-\frac{7}{25}; -\frac{15}{49}; 5; 8; 16; 21$ etc.

28. $x = \frac{m^2 - n^2}{5n^2} = 0; -\frac{3}{20}; -\frac{8}{45}; -\frac{3}{16}; \frac{3}{5}; -\frac{1}{9};$
$-\frac{21}{125}; -\frac{9}{49}; 3; 7; 16$ etc.

29. Quand, dans le trinome $ax^2 + bx + c$, le terme c est un carré q^2, on égale ce trinome à $\left(\frac{m}{n}x + q\right)^2$. Dans le présent exemple, on pose : $3x^2 - 2x + 9 = \left(\frac{m}{n}x - 3\right)^2$; d'où :

$x = \frac{2(3m - n)n}{m^2 - 3n^2} = -2; -\frac{4}{11}; 0; \frac{8}{47}; 10; -\frac{18}{23};$
$-\frac{10}{71}; \frac{14}{143}; 4; -36$ etc.

30. $x = \frac{(3n - 4m)n}{m^2 - 5n^2} = \frac{1}{4}; -\frac{4}{19}; -\frac{15}{44}; -\frac{32}{79}; 5; -\frac{3}{41};$
$-\frac{35}{121}; -\frac{91}{241}$ etc.

31. $x = \frac{(5n + 12m)n}{2n^2 - m^2} = 17; \frac{44}{7}; \frac{81}{17}; \frac{128}{31}; -\frac{29}{2}; \frac{117}{14};$
$\frac{245}{46}; \frac{413}{94}$ etc.

32. $x = \frac{(2m - n)\,2n}{7n^2 - m^2} = \frac{1}{3}; 0; -\frac{3}{31}; -\frac{16}{111}; 2; \frac{6}{59};$
$-\frac{10}{171}; -\frac{14}{113}$ etc.

33. $x = \frac{(7n - 2m)n}{10n^2 - m^2} = \frac{5}{9}; \frac{8}{13}; \frac{57}{89}; \frac{104}{159}; \frac{1}{2}; \frac{51}{86}; \frac{155}{246};$
$\frac{35}{54}$ etc.

34. $x = \frac{2(n - 5m)n}{8n^2 - m^2} = -\frac{8}{7}; -\frac{12}{31}; -\frac{12}{71}; -\frac{8}{127}; -\frac{9}{2};$
$-\frac{21}{34}; -\frac{25}{98}; -\frac{21}{194}$ etc.

35. $x = \frac{2(n - 7m)n}{6n^2 - m^2} = -\frac{12}{5}; -\frac{20}{13}; -\frac{24}{53}; -\frac{24}{95}; -13;$
$-\frac{33}{25}; -\frac{45}{73}; -\frac{49}{145}$ etc.

36. Quand, dans le trinome $ax^2 + bx + c$, $b^2 - 4ac$ est un carré parfait (ex. 36 à 41), on peut toujours trouver des valeurs de x qui rendent le trinome un carré parfait. On décompose le trinome en facteurs du premier degré; l'exemple 36 donne $(x - 5)(x - 1)$, et on pose:

$(x - 5)(x - 1) = \frac{m^2}{n^2}(x - 5)^2$; d'où :

$x = \frac{n^2 - 5m^2}{n^2 - m^2} = -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{11}{15};\ \frac{5}{6};\ \frac{19}{3};\ -\frac{11}{5};\ \frac{5}{21};$ $\frac{29}{45}$ etc.

37. $x = \frac{2n^2 - m^2}{n^2 - m^2} = \frac{7}{3};\ \frac{17}{8};\ \frac{31}{15};\ \frac{49}{24};\ \frac{2}{3};\ \frac{14}{5};\ \frac{46}{21};\ \frac{94}{45}$ etc.

38. $x = \frac{2m^2 + 3n^2}{2n^2 - m^2} = 5;\ 2;\ \frac{29}{17};\ \frac{50}{31};\ -\frac{11}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{83}{46};$ $\frac{155}{94}$ etc.

39. $x = \frac{3m^2 + n^2}{2n^2 - m^2} = 4;\ 1;\ \frac{12}{17};\ \frac{19}{31};\ -\frac{13}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{37}{46};\ \frac{61}{94}$ etc.

40. $x = \frac{3m^2 + n^2}{m^2 - 2n^2} = -4;\ -1;\ -\frac{12}{17};\ -\frac{19}{31};\ \frac{13}{2};$ $-\frac{3}{2};\ -\frac{37}{46};\ -\frac{61}{94}$ etc.

41. $x = \frac{2m^2 - n^2}{3n^2 - m^2} = \frac{1}{2};\ -\frac{2}{11};\ -\frac{7}{26};\ -\frac{14}{47};\ -7;\ \frac{1}{2};$ $-\frac{1}{23};\ -\frac{17}{71}$ etc.

---

42. Dans les exemples qui, comme celui-ci, ne rentrent dans aucun des cas précédents, il faut, si possible, mettre le polynome sous forme d'un carré parfait plus un produit de deux facteurs binomes, et l'on égale le tout à un carré, comme suit :

$2x^2 - 3x - 10 = x^2 + (x^2 - 3x - 10) = x^2 + (x-5)(x+2)$

$x^2 + (x-5)(x+2) = \left\{x + (x-5)\frac{m}{n}\right\}^2$; d'où :

$x = \frac{5m^2 + 2n^2}{m^2 + 2mn - n^2} = \frac{7}{2};\ 13;\ -\frac{23}{2};\ -\frac{37}{7};\ \frac{22}{7};\ \frac{38}{7};$ $-70;\ -\frac{118}{17}$ etc.

43. $x = -\frac{3m^2 + 2n^2}{m^2 + n^2 - 4mn} = \frac{5}{2};\ \frac{11}{3};\ \frac{21}{2};\ -35;\ \frac{14}{3};\ \frac{30}{11};$ $\frac{62}{11};\ \frac{110}{3}$ etc.

44. $x = \frac{3n^2 - 7m^2}{n^2 - m^2 - 4mn} = 1\,;\, -1\,;\, -5\,;\, -41\,;\, \frac{25}{11};\ \frac{1}{19};$
$-\frac{47}{19};\ -\frac{119}{11}$ etc.

45. $x = \frac{3m^2 + 2n^2}{3n^2 - 6mn - m^2} = -\frac{5}{4}\,;\, -11\,;\, \frac{21}{8};\ \frac{35}{23};\ -\frac{14}{13};$
$-\frac{30}{13};\ \frac{62}{11};\ \frac{110}{59}$ etc.

---

46. On peut poser $x^2 + y^2 = \left(x + \frac{m}{n}\right)^2$; d'où :
$x = \frac{y^2n^2 - m^2}{2mn}$. En donnant à y les valeurs entières 1, 2, etc., ainsi qu'à m et n, on trouvera, par exemple :
$x = \pm\frac{3}{4};\ \pm\frac{4}{3};\ \pm\frac{15}{8};\ \pm\frac{8}{3};\ \pm\frac{15}{4};\ \pm\frac{24}{5};\ \pm\frac{35}{6}..$
$y = \pm 1;\ \pm 1\,;\ \pm 1\,;\ \ \pm 2;\ \ \pm 2;\ \ \pm 2\,;\ \pm 2..$
On peut poser aussi : $x^2 + y^2 = (x + m)^2$; d'où :
$x = \frac{m^2 - y^2}{2m}$, et $\begin{cases} x = \frac{3}{4};\ \frac{5}{6};\ 4... \\ y = 1;\ 2;\ 3... \end{cases}$

Autre méthode. Posons $x = vy$; alors
$$x^2 + y^2 = v^2y^2 + y^2 = y^2(v^2 + 1).$$
Mais pour que $y^2(v^2 + 1)$ soit un carré, il suffit que $v^2 + 1$ soit un carré. Posant donc $v^2 + 1 = \left(v + \frac{m}{n}\right)^2$, on a : $v = \frac{x}{y} = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$.

Le numérateur du second membre donne les valeurs de x; le dénominateur celles de y. Cette méthode ne donne que des valeurs entières pour x et y (m et n étant supposés entiers). On trouve ainsi :
$x = 3;\ \ 5;\ 8;\ 15;\ 12;\ \ 7;\ 24;\ 21;\ 16;\ \ 9...$
$y = 4;\ 12;\ 6;\ \ 8;\ 16;\ 24;\ 10;\ 20;\ 30;\ 40...$

47. $v = \frac{m^2 + n^2}{2mn} = \frac{x}{y};\ \begin{cases} x = 2;\ 5;\ 10;\ 17;\ 13;\ 18... \\ y = 2;\ 4;\ \ 6;\ \ 8;\ 12;\ 18... \end{cases}$

48. $v = \frac{3n^2 - m^2}{2mn} = \frac{y}{x};\ \begin{cases} x = 2;\ \ 4;\ \ 6;\ \ 8;\ 12... \\ y = 2;\ 11;\ 26;\ 47;\ 23... \end{cases}$

49. $v = \frac{7n^2 - m^2}{4mn} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 6;\ 27;\ 62;\ 19\ldots \\ y = 4;\ \ 8;\ 12;\ 24\ldots \end{cases}$

50. $v = \frac{5n^2 + m^2}{6mn} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 6;\ 21;\ 46;\ 81;\ 49\ldots \\ y = 6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36\ldots \end{cases}$

51. $v = \frac{3n^2 - m^2}{8mn} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = 8;\ 32;\ 16;\ 48;\ 24;\ 32;\ 40\ldots \\ y = 2;\ \ 8;\ 11;\ 23;\ 26;\ 47;\ 74\ldots \end{cases}$

52. $v = \frac{m^2 + 3n^2}{2n^2} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 3;\ 4;\ 7;\ 21;\ 43\ldots \\ y = 2;\ 2;\ 2;\ \ 8;\ 18\ldots \end{cases}$

53. $v = \frac{m^2 - 3n^2}{5n^2} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = \ \ 20;\ \ \ 20;\ \ \ 5;\ 5;\ 5;\ 20\ldots \\ y = -11;\ -8;\ -2;\ 1;\ 6;\ \ 4\ldots \end{cases}$

54. $v = \frac{8n^2 - m^2}{3n^2} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = 3;\ 12;\ 3;\ 27;\ 12;\ 27\ldots \\ y = 7;\ \ 7;\ 8;\ \ 8;\ 28;\ 68\ldots \end{cases}$

55. $v = \frac{m^2 - 7n^2}{2n^2} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = \ \ 2;\ \ \ 2;\ 2;\ 8;\ 18\ldots \\ y = -6;\ -3;\ 2;\ 8;\ \ 1\ldots \end{cases}$

56. $v = \frac{m^2 + 5n^2}{3n^2} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = 3;\ 12;\ 27;\ 27\ldots \\ y = 6;\ 21;\ 49;\ 46\ldots \end{cases}$

57. $v = \frac{m^2 - 7n^2}{3n^2} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = -7;\ -3;\ \ 1;\ 2;\ \ 8;\ \ 9\ldots \\ y = \ \ 3;\ \ \ 12;\ 27;\ 3;\ 12;\ 48\ldots \end{cases}$

58 $v = \frac{2(n^2 + 2m^2)}{n^2 - 3m^2} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 12;\ 48;\ 22;\ 36\ldots \\ y = \ \ 1;\ \ 4;\ \ 6;\ 13\ldots \end{cases}$

59. $v = \frac{n^2 - 6m^2}{m^2 + n^2 - 6mn} = \frac{y}{x}$; $\begin{cases} x = -8;\ -7;\ \ 1;\ \ 8;\ 17\ldots \\ y = \ \ 3;\ \ \ 10;\ 30;\ 43;\ 58\ldots \end{cases}$

60. $v = \frac{7m^2 + n^2}{2n^2 - 3m^2} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 11;\ 16;\ 23;\ 32\ldots \\ y = \ \ 5;\ 15;\ 29;\ 47\ldots \end{cases}$

61. $v = \frac{3n^2 + m^2}{n^2 - 3m^2} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 13;\ 28;\ 49;\ 76\ldots \\ y = \ \ 1;\ \ 6;\ 13;\ 22\ldots \end{cases}$

62. $v = \frac{m^2 + 15n^2}{2n(7n - 4m)} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = 16;\ 61;\ 136\ldots \\ y = \ \ 6;\ 40;\ 102\ldots \end{cases}$

63. $v = \frac{n^2 - 3m^2}{m^2 + n^2 - 4mn} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = \ \ 1;\ \ \ 6;\ 13;\ 22;\ 69\ldots \\ y = -3;\ -2;\ \ 1;\ \ 6;\ 13\ldots \end{cases}$

64. $v = \frac{m^2 - n^2}{n^2 - 2mn} = \frac{x}{y}$; $\begin{cases} x = \ \ 3;\ \ \ 16;\ -15;\ 5\ldots \\ y = -3;\ -21;\ \ \ \ 8;\ 3\ldots \end{cases}$

65. $x = m^2 + y - 3$; $\begin{cases} x = 2;\ 7;\ 14;\ 23;\ 3;\ 8;\ 15\ldots \\ y = 1;\ 1;\ \ 1;\ \ 1;\ 2;\ 2;\ \ 2\ldots \end{cases}$

66. $x = m^2 - y - 3;\ \begin{cases} x = 5;\ 12;\ 21;\ 4;\ 11;\ 3... \\ y = 1;\ \ 1;\ \ 1;\ 2;\ \ 2;\ 3... \end{cases}$

67. $x = \dfrac{m^2 + n^2y^2 - n^2}{2mn};\ \begin{cases} x = \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{9}{2};\ 8;\ \frac{25}{2};\ 18... \\ y = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6... \end{cases}$

68. $x = \dfrac{n^2 + n^2y^2 - m^2}{2mn};\ \begin{cases} x = \frac{1}{2};\ \frac{7}{4};\ 2;\ \frac{19}{4};\ \frac{39}{4}... \\ y = 1;\ ;\ 1;\ 2;\ 2;\ 3... \end{cases}$

69. $y = \dfrac{2(n^2 + m^2 + mnx)}{n^2 - m^2};\ \begin{cases} x = 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 3... \\ y = \frac{14}{3};\ \frac{13}{4};\ 6;\ 4;\ \frac{22}{3}... \end{cases}$

70. $x = \dfrac{n^2(12 - y^2) - m^2}{2mn};\ \begin{cases} x = 5;\ \frac{7}{2};\ 1;\ \frac{43}{4};\ \frac{17}{3};\ \frac{23}{12}... \\ y = 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3... \end{cases}$

71. Les deux équations du problème donnent :

$$xy = y(40 - y - z) = 120;\ \text{d'où}\ z = \frac{40y - y^2 - 120}{y};$$

d'où pour x, y, z, 10 groupes de valeurs positives et entières dont les 4 suivants seuls, donnant deux solutions, conviennent à un triangle. Enfin le triangle donné par le premier ou le dernier groupe de valeurs est seul rectangle.

$$x = 15;\ 12;\ 10;\ \ 8$$
$$y = \ 8;\ 10;\ 12;\ 15$$
$$z = 17;\ 18;\ 18;\ 17.$$

72. 3, 5, 11, 13, etc.

CHAPITRE XIII

DES INÉGALITÉS.

1. Inégalités du premier degré.

LXXV

1. $13 > 5$. **2.** $13 > 8$. **3.** $2a - 4 < x^2 + 2x$.

4. $6a + b > 4x - 2(4 + b)$. **5.** $x^2 + y^2 + y - 2a > 7 - a + b$.

6. $x^2 + 7a > 7a + 6$. **7.** $x + 4y < 13$.
8. $2x - 1 > 3a + 3$.

---

9. $12 > 5$. **10.** $3 > \frac{3}{4}$. **11.** $4 < 9$. **12.** $a + 4 < 1$.
13. $a^2 - 2x < 3 - x - b^2$. **14.** $8 - (a - b)^2 > (a + b)^2 - 2$, ou en simplifiant : $5 > a^2 + b^2$.
15. $ax^2 > b^2 - 8$.
16. $2\{(a + b)^3 - (a^3 + b^3)\} > -2 + 6a^2b$, ou $3ab^2 > -1$.

---

17. $21 > -7$. **18.** $-18 < 2$. **19.** $-6 < -1$.
20. $-a^2b < -b^2$. **21.** $-8a < 2x$. **22.** $28 > 8$.
23. $-(a - b)^2 < -(x + y)^2$. **24.** $m(1 - m) < -am$.
25. $18a^2 - a^2y^2 < 5a^2$ **26.** $4 - 4m < 4m + 20$.

---

27. $3 > 2$. **28.** $-6 > -8$. **29.** $21 > 13$. **30.** $a < a^3$.
31. $a + b > 1$. **32.** $-a^7 > -3a$. **33.** $-(x^2 + 2b) < -7x^2$.

---

34. $20 > 2$. **35.** $a^2 - 1 < 70$. **36.** $143 > 56$.
37. $a^2 - b^2 > mn$. **38.** $a^4 + b^4 + a^2b^2 > 30$.
39. $a^3 - b^3 > x^2 - y^2$. **40.** $8 > 5$. **41.** $5\frac{1}{3} > \frac{2}{7}$.
42. $24 > 3$. **43.** $x - y > \frac{1}{2}a$. **44.** $a + b > x + y$.
45. $900 > 144$. **46.** $27 < 343$.
47. $(a + b)^3 > (a - x)^3$, ou
$3a^2(x + b) + (x^3 + b^3) > 3a(x^2 - b^2)$.
48. $a^2 - 2ab + b^2 < m^2 + 2m + 1$.
49. $(x + 1)^4 < y^4$ **50.** $a^2 - 2a + 1 < b^2$. **51.** $a^5 < (b - 1)^5$.
52. $27 > -8$. **53.** $-1 > -32$. **54.** $(1 - x)^3 < -a^3$.
55. $(3 - e)^7 > -1$. **56.** $25 < 49$. **57.** $(1 + a)^4 > b^4$.
58. $(m + n)^2 > (7 + n)^2$, ou $m^2 + 2mn > 49 + 14n$.
59. $-a^3(1 + m)^3 > x^3$. **60.** $3 > 2$. **61.** $-5 < +4$.

62. $-6 < -3$. **63.** $9 > 7$. **64.** $-9 < -7$.
65. $6 > 5$, ou $-6 < -5$. **66.** $5 < 7$, ou $-5 > -7$.
67. $4 + ab > 2x - (a^2 + b^2)$. **68.** $ax(x - a) - x^3 > a^3 - 2$.
69. $-(2x^2 + 1) < x$. **70.** $2a^2 < 2ax + 3$. **71.** $x < y$.
72. $a^2x^2 > 2$.

LXXVI

1. $x > -\frac{1}{2}$. **2.** $x > -\frac{1}{4}$. **3.** $x > 6$. **4.** $x < \frac{2}{a + 2a^2}$.

5. $x > \frac{24}{25}$. **6.** $x > \frac{305}{164}$. **7.** $x < 3\frac{11}{15}$. **8.** $y < \frac{8 - a^2}{2(a + 2)}$.

9. $x < \frac{11}{12}$. **10.** $x < -\frac{4}{5}$. **11.** $x > -\frac{8m}{7}$. **12.** $x < 9$.

13. $x > \frac{25}{18}$. **14.** $x > \frac{1}{144}$. **15.** $x > \frac{23}{43}$. **16.** $x < \frac{32}{19}$.

17. $x < -2\frac{13}{20}$. **18.** $x < \frac{5}{42}$.

---

19. La première inégalité donne $y < \frac{2x - 4}{3}$; la seconde $y > 12 - 4x$; d'où $\frac{2x - 4}{3} > 12 - 4x$, et par conséquent $x > \frac{20}{7}$. On peut donc donner à x toute valeur supérieure à $\frac{20}{7}$. A chacune d'elles correspondra pour y une valeur comprise entre les limites $y < \frac{2x - 4}{3}$ et $y > 12 - 4x$. Ainsi soit $x = 3$; alors $y < \frac{2}{3}$ et > 0; entre ces limites, les inégalités sont satisfaites.

20. $x < \frac{71}{11}$; $y < 20 - 2x, > \frac{5x - 11}{3}$.

21. $x < -\frac{2}{5}$; $y > \frac{3x}{2}, < \frac{2x - 1}{3}$.

22. $x > \frac{2a^3 + 10a - 15}{2a^2 - 4}$; $y > a^2 - ax + 5, < \frac{15 - 4x}{2a}$.

23. $x < -13$; $y > \frac{10x + 1}{3}, < 3x - 4$.

24. $x > \frac{4}{5}$; $y > \frac{x}{4}, < \frac{3x}{2} - 1$.

25. $x < -\frac{7}{6}$; $y > 7x + 4, < x - 3$.

26. $x > \frac{11}{16}$; $y < \frac{3}{4}(2x - 3), > \frac{1}{2}(1 - 5x)$.

27. $x > \frac{16}{3}$; $y < -(x + 4), > \frac{8 - 5x}{2}$.

---

28. Les quantités a et b sont inégales. Le carré de leur différence est positif, c'est-à-dire que $a^2 - 2ab + b^2 > 0$; donc : $a^2 + b^2 > 2ab$.

29. Soit $\frac{a}{b}$ la fraction ; sa valeur réciproque est $\frac{b}{a}$; la somme $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est $>$ ou $<$ 2 suivant que $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 >$ ou $< 2^2$ ou que $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 >$ ou < 4 ou que $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} >$ ou < 2. Or d'après le problème précédent, on a $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} > 2\,\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$; ajoutons membre à membre $2.\,\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 2$; on aura : $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 > 4$; d'où : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

30. On a, puisque les fractions vont en augmentant de valeur à partir de la première :

$a = m\cdot\frac{a}{m}$; $b > n.\,\frac{a}{m}$; $c > p\,\frac{a}{m}$;... $h > u\cdot\frac{a}{m}$;

additionnant ces inégalités membre à membre, on a :

$$a + b + c + \ldots. h > (m + n + p + \ldots. u)\frac{a}{m};$$

d'où $\dfrac{a + b + c\ldots. + h}{m + n + p\ldots. + u} > \dfrac{a}{m}$. On prouverait de la même manière que $\dfrac{a + b + c\ldots. + h}{m + n + p\ldots. + u} < \dfrac{h}{u}$.

31. $\sqrt{7} + \sqrt{10} >$ ou $< \sqrt{3} + \sqrt{19}$ suivant que les carrés
$17 + 2\sqrt{70} >$ ou $< 22 + 2\sqrt{54}$, ou que
$2\sqrt{70} >$ ou $< 5 + 2\sqrt{54}$; ou que
$280 >$ ou $< 25 + 216 + 10\sqrt{54}$; ou enfin que
$39 >$ ou $< 10\sqrt{54}$.
Or $39 < 10\sqrt{54}$; donc $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

32. $\sqrt{8} + \sqrt{12} > \sqrt{2} + \sqrt{20}$.

33. $\sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{6}$ est la plus grande.

---

2. Inégalités du second degré.

LXXVII

1. $x >$ ou < -2. **2.** $x >$ ou $< -\frac{3}{5}$. **3.** $x >$ ou $< \frac{1}{4}$.

4. Toujours satisfaite. **5.** Toujours satisfaite.

6. Toujours satisfaite. **7.** $x > 2$ ou < -3.

8. x compris entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$. **9.** $x > -5$ et < 3.

10. Impossible. **11.** Impossible. **12.** $x < 4$ et > -20.

---

13. x compris entre 7 et -3. **14.** x compris entre 6 et -2.

15. x compris entre $\frac{5}{2}$ et -3. **16.** $x < \frac{1}{3}$ ou $> \frac{5}{2}$.

17. $x > \frac{7}{3}$ ou $< \frac{1}{5}$. **18.** $x > \frac{1}{4}$ ou $< \frac{1}{5}$.

19. Satisfaite par toutes les valeurs de x non comprises entre $\sqrt{3}$ et 2, et $-\sqrt{3}$ et -2.

20. Satisfaite par toutes les valeurs de x non comprises entre 2 et 3, ou -2 et -3.

21. $x < 8$ et > 3, ou $x > -8$ et < -3.

22. Satisfaite par toutes les valeurs de x non comprises entre 2 et 10, ou -2 et -10.

23. $x < 10$ et > 2, ou < -2 et > -10.

24. On peut donner à x toutes les valeurs sauf celles comprises entre $\frac{1}{3}$ et 3, ou entre $-\frac{1}{2}$ et -2.

25. Il s'agit de savoir quelles sont les valeurs de x pour lesquelles le premier membre est positif ou devient négatif. Or le signe d'un produit de deux quantités étant le même que celui de leur quotient, nous pouvons écrire l'inégalité sous la forme
$(x-5)(x-7) > 0$. Elle donne $x < 5$ ou > 7.

26. $x > 6$, ou < -5.

27. $x < 3$ et > 2, ou $x < -2$ et > -3.

28. Satisfaite par toutes les valeurs de x excepté par celles qui sont comprises entre $-2+\sqrt{2}$ et $-2-\sqrt{2}$, soit entre $-0{,}5858$ et $-3{,}4142$.

29. Toutes les valeurs de x conviennent, excepté celles qui sont comprises entre 1 et 4, ou -2 et -3.

30. Satisfaite par toutes les valeurs de x sauf celles qui sont comprises entre 3 et 5, ou entre 2 et -2.

31. Il faut que x ne soit ni > 6, ni < -4, ni égal à 6, -1 ou -4.

CHAPITRE XIV

PERMUTATIONS; ARRANGEMENTS ; COMBINAISONS.

LXXVIII

1. Permutations.

1. De 403 291 461 126 605 635 584 000 000 manières.

2. 6 mots. **3.** De 87 178 291 200 manières.

4. De 265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000 manières.

5. 720 mots **6.** De 40 320 manières.

7. De 15 511 210 043 330 985 984 000 000 manières.

8. De 2 432 902 008 176 640 000 manières.

9. 362 880 nombres. **10.** 3 265 920 nombres.

11. Combiner 40 320; oxydant, 5 040; manipuler 362 880; Andore, 720; Charlestown, 39 916 800 mots.

12. Pach., 1 814 400 mots ; div. 3 991 680 m.; inc., 62 336 074 312 512 000 m.; Mis., 6 300 m.; hip., 3 326 400 m.; Car., 420 m.; Ph., 100 800 mots.

13. 1 060 137 318 240 manières.

14. 2 331 418 652 362 800 manières.

15. 12. **16.** 7 920. **17.** 24 504 480. **18.** 2 095 133 040.

19. 258 408 471 321 000.

20. 1 059 352 146 943 391 456 483 328 000 000.

21. 5 040 mots. **22.** $5\,040 \times 6 = 30\,240$ mots. **23.** Il y a 4 *a*.

LXXIX

2. Arrangements.

1. 132. **2.** 235 989 936 000. **3.** 56 manières.

4. 3 603 600 arrang. **5.** 1° 358 800; 2° 165 765 600.

6. 504 nombres. **7.** 1° 900 nombres; 2° 9000 nombres.

8. 205 200 mots. **9.** 2 052 000 mots. **10.** 11 400 mots.

11. 1° 5 040 manières ; 2° 30 240 manières. **12.** $n = 23$.

13. $m = 17$. **14.** 1° 256 nombres ; 2° 6561 nombres.

15. 248 832. **16.** 56 874 039 553 216 arrangements.

17 19 676 527 011 956 855 056. **18.** 146 813 779 479 510.

19. $n = 14$. **20.** $p = 14$. (1)

LXXX

3. Combinaisons.

1. 220. **2.** 2 558 620 845. **3.** 56. **4.** 495.

5. 121 399 651 100. **6.** 30 divis. **7.** 12 672 800 manières.

8. 56 manières. **9.** 455 manières. **10.** 280 costumes.

11. 768 625 composés. **12.** 187 467 280 composés.

13. 27405 nuits ; chaque soldat serait 3654 fois de service.

14. 252 combin.; a entrera dans 126 ; a, b, c, entreront dans 21 combinaisons.

15. Soit C_{n-1} le nombre des combinaisons de m objets $n - 1$ à $n - 1$; pour trouver le nombre des combinaisons n à n on n'aura qu'à multiplier C_{n-1} par

$\frac{m - n + 1}{n} = \frac{m + 1}{n} - 1$. Le produit croîtra tant qu'on aura $\frac{m + 1}{n} - 1 > 1$ ou $\frac{m + 1}{n} > 2$ ou $n < \frac{m + 1}{2}$. Si m est pair, $n = \frac{m}{2}$; si m est impair,

$$n = \frac{1}{2}(m - 1) \text{ ou } \frac{1}{2}(m + 1).$$

16. 5. **17.** 1023. **18.** 10. **19.** 17.

20. 238 div. sans compter le nombre lui-même.

21. 94 diviseurs. **22.** 718 diviseurs.

(1) Lire dans l'énoncé 38 417 au lieu de 1 297.

23. Combin. n à $n = \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ldots\ldots n}$;

Combin. $m-n$ à $m-n = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-(m-n)+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ldots m-n}$;

d'où : $\dfrac{\text{Comb. } n \text{ à } n}{\text{Comb. } m-n \text{ à } m-n} = \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}$

$\times \dfrac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n)}{m(m-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(n+1)}$

$= \dfrac{1.2.3\ldots(m-n)(m-n+1)\ldots(m-1)m = \underline{|m}}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots\ldots\ldots(m-1)m.\ \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{|m}} = 1$;

donc nombre de combin. n à n = nombre de combin. $m-n$ à $m-n$.

24. 635 013 559 600 combinaisons qu'on mettrait 482 936,77 ans à former.

25. 1 528 562 927 268 877 500 combinaisons.

26. 704 982 460 000 manières.

CHAPITRE XV

BINOME DE NEWTON.

LXXXI

1. $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.

2. $b^4 + 4b^3x + 6b^2x^2 + 4bx^3 + x^4$.

3. $d^5 + 5d^4y + 10d^3y^2 + 10d^2y^3 + 5dy^4 + y^5$.

4. $c^6 + 6c^5z + 15c^4z^2 + 20c^3z^3 + 15c^2z^4 + 6cz^5 + z^6$.

5. $a^7 + 7a^6p + 21a^5p^2 + 35a^4p^3 + 35a^3p^4 + 21a^2p^5 + 7ap^6 + p^7$.

6. $m^{11} + 11m^{10}n + 55m^9n^2 + 165m^8n^3 + 330m^7n^4 + 462m^6n^5 + 462m^5n^6 + 330m^4n^7 + 165m^3n^8 + 55m^2n^9 + 11mn^{10} + n^{11}$.

7. $p^{13} + 13p^{12}r + 78p^{11}r^2 + 286p^{10}r^3 + 715p^9r^4 + 1287p^8r^5$
$+ 1716p^7r^6 + 1716p^6r^7 + 1287p^5r^8 + 715p^4r^9 + 286p^3r^{10}$
$+ 78p^2r^{11} + 13pr^{12} + r^{13}$.

8. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

9. $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

10. $a^7 - 7a^6x + 21a^5x^2 - 35a^4x^3 + 35a^3x^4 - 21a^2x^5 + 7ax^6 - x^7$.

11. $h^{13} + 13h^{12}z + 78h^{11}z^2 + 286h^{10}z^3 + 715h^9z^4 + 1287h^8z^5$
$+ 1716h^7z^6 + 1716h^6z^7 + 1287h^5z^8 + 715h^4z^9 + 286h^3z^{10}$
$+ 78h^2z^{11} + 13hz^{12} + z^{13}$.

12. $h^{11} - 11h^{10}z + 55h^9z^2 - 165h^8z^3 + 330h^7z^4 - 462h^6z^5 +$
$462h^5z^6 - 330h^4z^7 + 165h^3z^8 - 55h^2z^9 + 11hz^{10} - z^{11}$.

13. $a^8 - 8a^7c + 28a^6c^2 - 56a^5c^3 + 70a^4c^4 - 56a^3c^5 + 28a^2c^6$
$- 8ac^7 + c^8$.

14. $b^9 - 9b^8p + 36b^7p^2 - 84b^6p^3 + 126b^5p^4 - 126b^4p^5 + 84b^3p^6$
$- 36b^2p^7 + 9bp^8 - p^9$.

15. $z^{13} - 13z^{12}d + 78z^{11}d^2 - 286z^{10}d^3 + 715z^9d^4 - 1287z^8d^5$
$+ 1716z^7d^6 - 1716z^6d^7 + 1287z^5d^8 - 715z^4d^9 + 286z^3d^{10}$
$- 78z^2d^{11} + 13zd^{12} - d^{13}$.

16. $1 + 12x + 66x^2 + 220x^3 + 495x^4 + 792x^5 + 924x^6 -$
$792x^7 + 495x^8 + 220x^9 + 66x^{10} + 12x^{11} + x^{12}$.

17. $1 - 9x + 36x^2 - 84x^3 + 126x^4 - 126x^5 + 84x^6 - 36x^7$
$+ 9x^8 - x^9$.

18. $1 - 8a + 28a^2 - 56a^3 + 70a^4 - 56a^5 + 28a^6 - 8a^7 + a^8$.

19. $1 + 15a + 105a^2 + 455a^3 + 1365a^4 + 3003a^5 + 5005a^6$
$+ 6435a^7 + 6435a^8 + 5005a^9 + 3003a^{10} + 1365a^{11} -$
$455a^{12} + 105a^{13} + 15a^{14} + a^{15}$.

20. $1 - 14z + 91z^2 - 364z^3 + 1001z^4 - 2002z^5 + 3003z^6 -$
$3432z^7 + 3003z^8 - 2002z^9 + 1001z^{10} - 364z^{11} + 91z^{12}$
$- 14z^{13} + z^{14}$.

21. $x^9 + 9x^8 + 36x^7 + 84x^6 + 126x^5 + 126x^4 + 84x^3 + 36x^2$
$+ 9x + 1$.

22. $x^{11} - 11x^{10} + 55x^9 - 165x^8 + 330x^7 - 462x^6 + 462x^5$
$- 330x^4 + 165x^3 - 55x^2 + 11x - 1$.

23. $y^8 - 8y^7 + 28y^6 - 56y^5 + 70y^4 - 56y^3 + 28y^2 - 8y + 1.$

24. $z^7 + 7z^6 + 21z^5 + 35z^4 + 35z^3 + 21z^2 + 7z + 1.$

25. $z^8 - 16z^7 + 112z^6 - 448z^5 + 1120z^4 - 1792z^3 + 1792z^2 - 1024z + 256.$

26. $8 + 12x + 6x^2 + x^3.$ 27. $16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4.$

28. $6561 + 17496x + 20412x^2 + 13608x^3 + 5670x^4 + 1512x^5 + 252x^6 + 24x^7 + x^8.$

29. $x^9 - 27x^8 + 324x^7 - 2268x^6 + 10206x^5 - 30618x^4 + 61236x^3 - 78732x^2 + 59049x - 19683.$

30. $z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2500z^3 + 9375z^2 + 18750z + 15625.$

31. $a^8 - 40a^7 + 700a^6 - 7000a^5 + 43750a^4 - 175000a^3 + 437500a^2 - 625000a + 390625.$

32. $16384 - 28672b + 21504b^2 - 8960b^3 + 2240b^4 - 336b^5 + 28b^6 - b^7.$

33. $h^{10} - 20h^9 + 180h^8 - 960h^7 + 3360h^6 - 8064h^5 + 13440h^4 - 15360h^3 + 11520h^2 - 5120h + 1024.$

34. $a^6 - 60a^5 + 1500a^4 - 20000a^3 + 150000a^2 - 600000a + 1000000.$

35. $b^5 + 20b^4 + 160b^3 + 640b^2 + 1280b + 1024.$

---

36. $\frac{1}{32} + \frac{5}{16}x + 1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x^4 + x^5.$

37. $y^6 + 2y^5 + \frac{5}{3}y^4 + \frac{20}{27}y^3 + \frac{5}{27}y^2 + \frac{2}{81}y + \frac{1}{729}.$

38. $\frac{1}{16384} - \frac{7v}{4096} + \frac{21v^2}{1024} - \frac{35v^3}{256} + \frac{35v^4}{64} - \frac{21v^5}{16} + \frac{7v^6}{4} - v^7.$

39. $a^8 - 1{,}6a^7 + 1{,}12a^6 - 0{,}448a^5 + 0{,}112a^4 - 0{,}01792a^3 + 0{,}001792a^2 - 0{,}0001024a + 0{,}00000256.$

40. $0{,}000729 + 0{,}01458x + 0{,}1215x^2 + 0{,}54x^3 + 1{,}35x^4 + 1{,}8x^5 + x^6.$

41. $0{,}0016384 - 0{,}028672z + 0{,}21504z^2 - 0{,}896z^3 + 2{,}24z^4 - 3{,}36z^5 + 2{,}8z^6 - z^7.$

42. $335{,}54432 + 524{,}288b + 327{,}68b^2 + 102{,}4b^3 + 16b^4 + b^5.$

43. $c^4 + 6c^3 + 13{,}5c^2 + 13{,}5c + 5{,}0625.$

44. $a^6 - 12{,}6a^5 + 66{,}15a^4 - 185{,}22a^3 + 291{,}7215a^2 - 245{,}04606a + 85{,}766121.$

45. $32a^5 + 80a^4x + 80a^3x^2 + 40a^2x^3 + 10ax^4 + x^5.$

46. $2187a^7 - 5103a^6y + 5103a^5y^2 - 2835a^4y^3 + 945a^3y^4 - 189a^2y^5 + 21ay^6 - y^7.$

47. $\frac{a^6}{64} + \frac{3a^5z}{16} + \frac{15a^4z^2}{16} + \frac{5a^3z^3}{2} + \frac{15a^2z^4}{4} + 3az^5 + z^6.$

48. $\frac{b^8}{6561} - \frac{8b^7y}{2187} + \frac{28b^6y^2}{729} - \frac{56b^5y^3}{243} + \frac{70b^4y^4}{81} - \frac{56b^3y^5}{27} + \frac{28b^2y^6}{9} - \frac{8by^7}{3} + y^8.$

49. $\frac{512x^9}{19683} + \frac{256x^8y}{729} + \frac{512x^7y^2}{243} + \frac{1792x^6y^3}{243} + \frac{448x^5y^4}{27} + \frac{224x^4y^5}{9} + \frac{224x^3y^6}{9} + 16x^2y^7 + 6xy^8 + y^9.$

50. $\frac{177147a^{11}}{4194304} - \frac{649539a^{10}b}{1048576} + \frac{1082565a^9b^2}{262144} - \frac{1082565a^8b^3}{65536} + \frac{360855a^7b^4}{8192} - \frac{168399a^6b^5}{2048} + \frac{56133a^5b^6}{512} - \frac{13365a^4b^7}{128} + \frac{4455a^3b^8}{64} - \frac{495a^2b^9}{16} + \frac{33ab^{10}}{4} - b^{11}.$

51. $x^4 - 2{,}4x^3 + 2{,}16x^2 - 0{,}864x + 0{,}1296.$

52. $-x^7 + 14x^6a - 84x^5a^2 + 280x^4a^3 - 560x^3a^4 + 672x^2a^5 - 448xa^6 + 128a^7.$

53. $6561x^8 - 17496x^7b + 20412x^6b^2 - 13608x^5b^3 + 5670x^4b^4 - 1512x^3b^5 + 252x^2b^6 - 24xb^7 + b^8.$

54. $-y^9 + 18y^8c - 144y^7c^2 + 672y^6c^3 - 2016y^5c^4 + 4032y^4c^5 - 5376y^3c^6 + 4608y^2c^7 - 2304yc^8 + 512c^9.$

55. $-z^5 + 15z^4a - 90z^3a^2 + 270z^2a^3 - 405za^4 + 243a^5.$

---

56. $64x^6 + 576x^5a + 2160x^4a^2 + 4320x^3a^3 + 4860x^2a^4 + 2916xa^5 + 729a^6.$

57. $3125d^5 - 9375d^4y + 11250d^3y^2 - 6750d^2y^3 + 2025dy^4 - 243y^5.$

58. $16384d^7 - 86016d^6z + 193536d^5z^2 - 241920d^4z^3 + 181440d^3z^4 - 81648d^2z^5 + 20412dz^6 - 2187z^7.$

59. $0{,}00032a^5 + 0{,}0024a^4b + 0{,}0072a^3b^2 + 0{,}0108a^2b^3 + 0{,}0081ab^4 + 0{,}00243b^5.$

60. $3{,}5831808b^7 - 4{,}1803776b^6y + 2{,}0901888b^5y^2 - 0{,}580608b^4y^3 + 0{,}096768b^3y^4 - 0{,}0096768b^2y^5 + 0{,}0005376by^6 - 0{,}0000128y^7.$

61. $\frac{a^5}{243} + \frac{5a^4b}{162} + \frac{10a^3b^2}{108} + \frac{10a^2b^3}{72} + \frac{5ab^4}{48} + \frac{b^5}{32}.$

62. $\frac{c^8}{390625} - \frac{2c^7d}{78125} + \frac{7c^6d^2}{62500} - \frac{7c^5d^3}{25000} + \frac{7c^4d^4}{16000} - \frac{7c^3d^5}{16000} + \frac{7c^2d^6}{25600} - \frac{2cd^7}{20480} + \frac{d^8}{65536}.$

63. $\frac{512m^9}{1953125} + \frac{1728m^8p}{390625} + \frac{2592m^7p^2}{78125} + \frac{2268m^6p^3}{15625} + \frac{5103m^5p^4}{12500} + \frac{15309m^4p^5}{20000} + \frac{15309m^3p^6}{16000} + \frac{19683m^2p^7}{25600} + \frac{59049mp^8}{163840} + \frac{19683p^9}{262144}.$

64. $\frac{64z^6}{15625} - \frac{576z^5b}{21875} + \frac{2160z^4b^2}{30625} - \frac{864z^3b^3}{8575} + \frac{972z^2b^4}{12005} - \frac{2916zb^5}{84035} + \frac{729b^6}{117649}.$

65. $\frac{2187h^7}{78125} - \frac{5103h^6v}{31250} + \frac{5103h^5v^2}{12500} - \frac{2835h^4v^3}{5000} + \frac{945h^3v^4}{2000} - \frac{189h^2v^5}{800} + \frac{21hv^6}{320} - \frac{v^7}{128}.$

66. $a^{10} + 5a^8b^3 + 10a^6b^6 + 10a^4b^9 + 5a^2b^{12} + b^{15}.$

67. $x^{18} - 6x^{15}a^5 + 15x^{12}a^{10} - 20x^9a^{15} + 15x^6a^{20} - 6x^3a^{25} + a^{30}.$

68. $y^{14} + 7y^{12}b + 21y^{10}b^2 + 35y^8b^3 + 35y^6b^4 + 21y^4b^5 + 7y^2b^6 + b^7$.

69. $d^{24} - 8d^{21}b^2 + 28d^{18}b^4 - 56d^{15}b^6 + 70d^{12}b^8 - 56d^9b^{10} + 28d^6b^{12} - 8d^3b^{14} + b^{16}$.

70. $a^{27} - 9a^{24}y^2 + 36a^{21}y^4 - 84a^{18}y^6 + 126a^{15}y^8 - 126a^{12}y^{10} + 84a^9y^{12} - 36a^6y^{14} + 9a^3y^{16} - y^{18}$.

71. $d^{24} - 24d^{21}x^2 + 252d^{18}x^4 - 1512d^{15}x^6 + 5670d^{12}x^8 - 13608d^9x^{10} + 20412d^6x^{12} - 17496d^3x^{14} + 6561x^{16}$.

72. $32h^{10} - 240h^8x^3 + 720h^6x^6 - 1080h^4x^9 + 810h^2x^{12} - 243x^{15}$.

73. $2187a^{14} + 25515a^{12}b^3 + 127575a^{10}b^6 + 354375a^8b^9 + 590625a^6b^{12} + 590625a^4b^{15} + 328125a^2b^{18} + 78125b^{21}$.

74. $1 - 10x^3 + 40x^6 - 80x^9 + 80x^{12} - 32x^{15}$.

75. $6561x^{16} - 17496x^{14} + 20412x^{12} - 13608x^{10} + 5670x^8 - 1512x^6 + 252x^4 - 24x^2 + 1$.

76. $1 + \frac{16a^5}{3} + \frac{112a^{10}}{9} + \frac{448a^{15}}{27} + \frac{1120a^{20}}{81} + \frac{1792a^{25}}{243} + \frac{1792a^{30}}{729} + \frac{1024a^{35}}{2187} + \frac{256a^{40}}{6561}$.

77. $\frac{p^{25}}{32} + \frac{15p^{20}y^4}{16} + \frac{90p^{15}y^8}{8} + \frac{270p^{10}y^{12}}{4} + \frac{405p^5y^{16}}{2} + 243y^{20}$.

78. $\frac{32a^{15}}{243} + \frac{20a^{12}b^2}{27} + \frac{5a^9b^4}{3} + \frac{15a^6b^6}{8} + \frac{135a^3b^8}{128} + \frac{243b^{10}}{1024}$.

79. $0{,}0016a^{12} - \frac{0{,}064a^9x^4}{3} + \frac{0{,}32a^6x^8}{3} - \frac{6{,}4a^3x^{12}}{27} + \frac{16x^{16}}{81}$.

80. $\frac{78125l^{14}}{2187} + \frac{10937{,}5l^{12}p^3}{243} + \frac{218{,}75l^{10}p^6}{9} + \frac{21{,}875l^8p^9}{3} + 1{,}3125l^6p^{12} + 0{,}14175l^4p^{15} + 0{,}008505l^2p^{18} + 0{,}0002187p^{21}$.

81. $128a^7 - 1344a^6cx + 6048a^5c^2x^2 - 15120a^4c^3x^3 + 22680a^3c^4x^4 - 20412a^2c^5x^5 + 10206ac^6x^6 - 2187c^7x^7$.

82. $729a^{12} + 2916a^{10}c^2x^3 + 4860a^8c^4x^6 + 4320a^6c^6x^9 + 2160a^4c^8x^{12} + 576a^2c^{10}x^{15} + 64c^{12}x^{18}$.

83. $b^5c^{10} - 10ab^4c^8y^3 + 40a^2b^3c^6y^6 - 80a^3b^2c^4y^9 + 80a^4bc^2y^{12} - 32a^5y^{15}$.

84. $256c^{16} - 768ac^{13}x^5 + 864a^2c^{10}x^{10} - 432a^3c^7x^{15} + 81a^4c^4x^{20}$.

85. $a^{10}b^{15} + 10a^{11}b^{13}x^4 + 40a^{12}b^{11}x^8 + 80a^{13}b^9x^{12} + 80a^{14}b^7x^{16} + 32a^{15}b^5x^{20}$.

86. $\frac{128a^7b^{14}}{2187} - \frac{112a^8b^{12}y}{243} + \frac{14a^9b^{10}y^2}{9} - \frac{35a^{10}b^8y^3}{12} + \frac{105a^{11}b^6y^4}{32} - \frac{567a^{12}b^4y^5}{256} + \frac{1701a^{13}b^2y^6}{2048} - \frac{2187a^{14}y^7}{16384}$.

---

87. $a^3\sqrt{a} + 7a^3x + 21a^2\sqrt{a}.x^2 + 35a^2x^3 + 35a\sqrt{a}.x^4 + 21ax^5 + 7\sqrt{a}.x^6 + x^7$.

88. $16b^4 - 64b^3\sqrt{2b}.m + 224b^3m^2 - 224b^2\sqrt{2b}.m^3 + 280b^2m^4 - 112\sqrt{2b}.m^5 + 56bm^6 - 8\sqrt{2b}.m^7 + m^8$.

89. $27c^3\sqrt{3c} + 378c^3a + 756c^2\sqrt{3c}.a^2 + 2520c^2a^3 + 1680c\sqrt{3c}.a^4 + 2016ca^5 + 448\sqrt{3c}.a^6 + 128a^7$.

90. $\frac{a^4}{16} - 3a^3\sqrt{\tfrac{1}{2}a}.y + \frac{63a^3y^2}{2} - 378a^2\sqrt{\tfrac{1}{2}a}.y^3 + \frac{2835a^2y^4}{2} - 6804a\sqrt{\tfrac{1}{2}a}.y^5 + 10206ay^6 - 17496\sqrt{\tfrac{1}{2}a}.y^7 + 6561y^8$.

91. $64e^3 + 192ae^2\sqrt{e} + 240a^2e^2 + 160a^3e\sqrt{e} + 60a^4e + 12a^5\sqrt{e} + a^6$.

92. $512b^9 - 2304b^8\sqrt{x} + 4608b^7x - 5376b^6x\sqrt{x} + 4032b^5x^2 - 2016b^4x^2\sqrt{x} + 672b^3x^3 - 144b^2x^3\sqrt{x} + 18bx^4 - x^4\sqrt{x}$.

93. $\frac{64a^6}{729} + \frac{64a^5\sqrt{2x}}{81} + \frac{160a^4x}{27} + \frac{320a^3x\sqrt{2x}}{27} + \frac{80a^2x^2}{3} + 16ax^2\sqrt{2x} + 8x^3$.

94. $\frac{243a^5}{1024} - \frac{405a^4\sqrt{\tfrac{1}{2}x}}{256} + \frac{135a^3x}{64} - \frac{45a^2x\sqrt{\tfrac{1}{2}x}}{16} + \frac{15ax^2}{16} - \frac{x^2\sqrt{\tfrac{1}{2}x}}{4}$.

95. $64a^6 - 576a^5\sqrt{y} + 2160a^4y - 4320a^3y\sqrt{y} + 4860a^2y^2 - 2916ay^2\sqrt{y} + 729y^3$.

96. $a^{14} + \frac{7a^{12}\sqrt{z}}{2} + \frac{21a^{10}z}{4} + \frac{35a^8z\sqrt{z}}{8} + \frac{35a^6z^2}{16} + \frac{21a^4z^2\sqrt{z}}{32} + \frac{7a^2z^3}{64} + \frac{z^3\sqrt{z}}{128}$.

97. $a^4\sqrt{a} + 9a^4\sqrt{x} + 36a^3x\sqrt{a} + 84a^3x\sqrt{x} + 126a^2x^2\sqrt{a}$
$+ 126a^2x^2\sqrt{x} + 84ax^3\sqrt{a} + 36ax^3\sqrt{x} + 9x^4\sqrt{a} + x^4\sqrt{x}.$

98. $b^4 - 8b^3\sqrt{by} + 28b^3y - 56b^2y\sqrt{by} + 70b^2y^2 - 56by^2\sqrt{by}$
$+ 28by^3 - 8y^3\sqrt{by} + y^4.$

99. $8c^3 + 24c^2\sqrt{6cx} + 180c^2x + 120cx\sqrt{6cx} + 270cx^2$
$+ 54x^2\sqrt{6cx} + 27x^3.$

100. $\frac{a^3\sqrt{\frac{1}{2}a}}{8} - \frac{7a^3\sqrt{2x}}{8} + \frac{21a^2x\sqrt{\frac{1}{2}a}}{2} - \frac{35a^2x\sqrt{2x}}{2} + 70ax^2\sqrt{\frac{1}{2}a}$
$- 42ax^2\sqrt{2x} + 56x^3\sqrt{\frac{1}{2}a} - 8x^3\sqrt{2x}.$

101. $\frac{8a^3}{27} + \frac{8a^2\sqrt{\frac{1}{2}ax}}{3} + 5a^2x + 10ax\sqrt{\frac{1}{2}ax} + \frac{45ax^2}{8}$
$+ \frac{27x^2\sqrt{\frac{1}{2}ax}}{8} + \frac{27x^3}{64}.$

102. $a^{15} - 10a^{13}x^2\sqrt{ax} + 45a^{12}x^5 - 120a^{10}x^7\sqrt{ax} + 210a^9x^{10}$
$- 252a^7x^{12}\sqrt{ax} + 210a^6x^{15} - 120a^4x^{17}\sqrt{ax} + 45a^3x^{20}$
$- 10ax^{22}\sqrt{ax} + x^{25}.$

103. $b^{22}\sqrt{b} + 9b^{20}y^2 + 36b^{17}y^4\sqrt{b} + 84b^{15}y^6 + 126b^{12}y^8\sqrt{b}$
$+ 126b^{10}y^{10} + 84b^7y^{12}\sqrt{b} + 36b^5y^{14} + 9b^2y^{16}\sqrt{b} + y^{18}.$

104. $\frac{8h^9}{27} + \frac{8h^7x^2\sqrt{\frac{1}{3}h}}{3} + \frac{10h^6x^4}{3} + \frac{20h^4x^6\sqrt{\frac{1}{3}h}}{3} + \frac{5h^3x^8}{2}$
$+ \frac{3hx^{10}\sqrt{\frac{1}{3}h}}{2} + \frac{x^{12}}{8}.$

105. $4a^2\sqrt[3]{4a^2} + 32a^2\sqrt[3]{6ax^2} + 112a^2x\sqrt[3]{9x} + 336ax^2\sqrt[3]{4a^2}$
$+ 420ax^2\sqrt[3]{6ax^2} + 336ax^3\sqrt[3]{9x} + 252x^4\sqrt[3]{4a^2} + 72x^4\sqrt[3]{6ax^2}$
$9x^5\sqrt[3]{9x}.$

106. $32a^5x^5 + 80a^4x^4\sqrt[3]{3xy^2} + 80a^3x^3y\sqrt[3]{9x^2y} + 120a^2x^3y^2$
$+ 30ax^2y^2\sqrt[3]{3xy^2} + 3xy^3\sqrt[3]{9x^2y}.$

107. $27a^3y^3\sqrt{3ay} + 189a^3y^3\sqrt[3]{2x^2y} + 189a^2xy^3\sqrt[6]{432a^3x^2y}$
$+ 630a^2x^2y^3 + 210ax^2y^2\sqrt[6]{108a^3x^4y^5} + 126ax^3y^2\sqrt[3]{4xy^2}$
$+ 28x^4y^2\sqrt{3ay} + 4x^4y^2\sqrt[3]{2x^2y}.$

108. $6561a^8b^8x^{24} - 17496a^7b^7x^{21}\sqrt[3]{5b^2xy^2} + 20412a^6b^7x^{18}y\sqrt[3]{25bx^2y}$
$- 68040a^5b^7x^{16}y^2 + 28350a^4b^6x^{13}y^2\sqrt[3]{5b^2xy^2}$
$- 7560a^3b^6x^{10}y^3\sqrt[3]{25bx^2y} + 6300a^2b^6x^8y^4$
$- 600ab^5x^5y^4\sqrt[3]{5b^2xy^2} + 25b^5x^2y^5\sqrt[3]{25bx^2y}.$

109. $\frac{x^5}{a^{10}} + \frac{10x^4\sqrt[6]{x^3y^2}}{a^9b} + \frac{45x^4\sqrt[3]{y^2}}{a^8b^2} + \frac{120x^3y\sqrt{x}}{a^7b^3} + \frac{210x^3y\sqrt[3]{y}}{a^6b^4}$
$+ \frac{252x^2y\sqrt[6]{x^3y^4}}{a^5b^5} + \frac{210x^2y^2}{a^4b^6} + \frac{120xy^2\sqrt[6]{x^3y^2}}{a^3b^7}$
$+ \frac{45xy^2\sqrt[3]{y^2}}{a^2b^8} + \frac{10y^3\sqrt{x}}{ab^9} + \frac{y^3\sqrt[3]{y}}{b^{10}}.$

110. $\frac{x^4\sqrt[3]{x^2}}{a^{14}} + \frac{7x^4\sqrt[4]{xy^3}}{a^{12}b} + \frac{21x^3y\sqrt[6]{x^5y^3}}{a^{10}b^2} + \frac{35x^3y^2\sqrt[12]{x^5y^3}}{a^8b^3} + \frac{35x^3y^3}{a^6b^4}$
$+ \frac{21x^2y^3\sqrt[12]{x^7y^9}}{a^4b^5} + \frac{7x^2y^4\sqrt[6]{xy^3}}{a^2b^6} + \frac{xy^5\sqrt[4]{x^5y}}{b^7}.$

111. $\frac{x^3z^3}{y^6} - \frac{6z^2\sqrt[6]{a^2x^3y^4z^3}}{y^5} + \frac{15z^2\sqrt[3]{a^2y}}{x^2y^3} - \frac{20az\sqrt{xz}}{x^5y} + \frac{15az\sqrt[3]{ay^2}}{x^7}$
$- \frac{6ay^2\sqrt[6]{a^4x^3y^2z^3}}{x^{10}} + \frac{a^2y^4}{x^{12}}.$

112. $128a^7 - 448a^6x\sqrt{-1} - 672a^5x^2 + 560a^4x^3\sqrt{-1} + 280a^3x^4$
$- 84a^2x^5\sqrt{-1} - 14ax^6 + x^7\sqrt{-1}.$

113. $729b^{12} + 2916b^{10}x\sqrt{-1} - 4860b^8x^2 - 4320b^6x^3\sqrt{-1}$
$+ 2160b^4x^4 + 576b^2x^5\sqrt{-1} - 64x^6.$

114. $a^7\sqrt{a} + 5a^6i\sqrt{x} - 10a^4x\sqrt{a} - 10a^3xi\sqrt{x} + 5ax^2\sqrt{a} + x^2i\sqrt{x}.$

115. $a^4 + 6a^3i\sqrt[12]{a^4x^9} - 15a^2x\sqrt[6]{a^4x^3} - 20a^2x^2i\sqrt[4]{x} + 15ax^3\sqrt[3]{a}$
$+ 6x^3i\sqrt[12]{a^8x^9} - x^4\sqrt{x}.$

116. $a^6 - 9a^5i\sqrt[3]{a} - 36a^4\sqrt[3]{a^2} + 84a^4i + 126a^3\sqrt[3]{a} - 126a^2i\sqrt[3]{a^2}$
$- 84a^2 + 36ai\sqrt[3]{a} + 9\sqrt[3]{a^2} - i.$

117. $- b^5 - 10b^4\sqrt{b} - 45b^4 - 120b^3\sqrt{b} - 210b^3 - 252b^2\sqrt{b}$
$- 210b^2 - 120b\sqrt{b} - 45b - 10\sqrt{b} - 1.$

118. $\{x^6 - 9x^5\sqrt[6]{8x^2} + 72x^4\sqrt[3]{x^2} - 168x^4\sqrt{2} + 504x^3\sqrt[3]{x}$
$- 504x^2\sqrt[6]{8x^4} + 672x^2 - 288x\sqrt[6]{8x^2} + 144\sqrt[3]{x^2} - 16\sqrt{2}\}i.$

119. $- \{y^5\sqrt[5]{y^3} + 7y^4\sqrt{5^5y^{12}} + 21y^4\sqrt[3]{25} + 175y^3\sqrt[5]{y}$
$+ 175y^2\sqrt[15]{5^5y^6} + 105y\sqrt[15]{25^5y^9} + 175y\sqrt[5]{y^4} + 25\sqrt[3]{5}\}i.$

120. $\frac{256b^{12}}{y^8} - \frac{1024b^9d\sqrt[6]{b^3y^4}}{y^7} + \frac{1792b^7d^2\sqrt[3]{y}}{y^5} - \frac{1792b^4d^3\sqrt{b}}{y^3}$
$+ \frac{1120b^2d^4\sqrt[3]{y^2}}{y^2} - \frac{448d^5\sqrt[6]{b^3y^2}}{b} + \frac{112d^6y^2}{b^3} - \frac{16d^7y^3\sqrt[6]{b^3y^4}}{b^6}$
$+ \frac{d^8y^5\sqrt[3]{y}}{b^8}.$

---

121. $8\,200\,192a^6$. **122.** $352\,716\,a^{11}d^{10}$. **123.** $326\,592x^{10}$.

124. $-29\,753\,640\,120a^{18}x^{55}$. **125.** $119\,759\,850x^{34}$.

126. $-12\,033\,222\,880y^{81}$. **127.** $\frac{1547a^{11}x^9}{256}$.

128. $-165a^4x^2$. **129.** $-1287a^4x^5i$.

130. $36\,146\,147\,370\,366\,245\,273\,600b^{21}c^{58}$.

131. Le coefficient du n^e terme depuis le commencement est :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ (n-1)}$$

Si l'on multiplie numérateur et dénominateur par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ (m-n+1)$, cette expression devient :

$$\frac{|\underline{m}}{|\underline{n-1}\ |\underline{m-n+1}}. \quad \text{(A)}$$

Le n^e terme depuis la fin est le $(m+1)-(n-1)$, ou le $m-n+2$ depuis le commencement, et son coefficient est :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\{m-(m-n+2)+2\}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ m-n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ (m-n+1)}$$

Si l'on multiplie ses deux termes par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ (n-1)$, le second membre de la dernière égalité devient

$$\frac{|\underline{m}}{|\underline{n-1}\ |\underline{m-n+1}},$$ expression égale à (A).

132. Le développement de $(a+b)^m$ comprend $m+1$ termes, dont le n^e est :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)}a^{m-n+1}\,b^{n-1}.$$

Le coefficient du $(n+1)^e$ terme se formera en multipliant le coefficient précédent par $\frac{m-n+1}{n}\cdot$ Or, ce produit croîtra tant qu'on aura

$\frac{m-n+1}{n}>1$ ou $n<\frac{m+1}{2}\cdot$ Le maximum aura lieu pour $n=\frac{m+1}{2}\cdot$ Comme n est entier, si m est pair, le rang du terme affecté du plus fort coefficient sera marqué par le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{m+1}{2}\cdot$ Si m est impair, il y aura deux termes dont les coefficients seront maximum, savoir le $\left(\frac{m+1}{2}\right)^e$ depuis le commencement et le suivant, le $\left(\frac{m+1}{2}\right)^e$ depuis la fin.

133. Le plus grand coefficient est :

1° De $(a+b^3)^{21}$, le 11e et le $12^e=352\,716$.

2° De $(b+x^2)^{16}$, le $9^e=12\,870$.

3° De $(1+y^5)^{32}$, le $17^e=601\,080\,390$.

134. Les coefficients du développement de $(1+a)^m$ sont identiquement les mêmes que ceux du développement de $(1-a)^m$. Or on a :

$$(1-a)^m=1-\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\text{etc.}$$

Pour m entier et positif, les termes de rang impair sont tous positifs, et ceux de rang pair négatifs. Si l'on fait $a=1$, les deux membres s'annullent. Donc la somme des termes de rang pair égale celles des termes de rang impair.

135. On a : $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$, ou

$$(1+x)^m - 1 = \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Faisant $x = 1$, on a $2^m - 1 = \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2}$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$

LXXXII

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$

1° : $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} - \frac{1}{9^5} + \text{etc.} = 0{,}9.$

2° : $1 - \frac{7}{100} + \left(\frac{7}{100}\right)^2 - \left(\frac{7}{100}\right)^3 + \left(\frac{7}{100}\right)^4 - \left(\frac{7}{100}\right)^5 + \text{etc.}$
$= \frac{3100}{3317} = 0{,}934\ 579\ 43\ldots$

3° : $1 + \frac{9}{1000} + \left(\frac{9}{1000}\right)^2 + \left(\frac{9}{1000}\right)^3 + \text{etc.} = \frac{1000}{991}$
$= 1{,}009\ 081\ 735\ldots$

2. $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \text{etc.}$
$= 1 + \frac{3}{16} - \frac{9}{512} + \frac{27}{8192} - \frac{320}{524\ 108} + \frac{1701}{8\ 388\ 608} - \text{etc.}$
$= 1{,}1726.$

3. $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + \text{etc.}$
$= 0{,}998\ 503\ 367\ldots$

4. $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \frac{22x^5}{729} - \frac{154x^6}{6561} + \text{etc.}$
1° 1,16 553 ; 2° 0,96 905 ; 3° 1,04 004.

5. $(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243} - \frac{91x^5}{729}$
$+ \frac{728x^6}{6561} - \frac{1976x^7}{19683} + \text{etc}$

1° 1,069 178.. 2° 1,000 667 555.. 3° 1,045 515 9..

6. $(1-x)^{\frac{2}{5}} = 1 - \frac{2x}{5} - \frac{3x^2}{25} - \frac{8x^3}{125} - \frac{26x^4}{625} - \frac{468x^5}{15625}$
$- \frac{1794x^6}{78125}$ etc. $= 0{,}998\,398\,075..$, pour $x = 0{,}004$.

7. $(1+15)^{\frac{1}{4}} = 15^{\frac{1}{4}} \left\{ 1 + \frac{1}{4.15} - \frac{3}{32.15^2} + \frac{7}{128.15^3} \right.$
$\left. - \frac{77}{2048.15^4} + \frac{231}{8192.15^5} \text{ etc.} \right\} = 1{,}016\,265\,498..$

8. $27^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2}{17}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{2}{3.27} - \frac{2^2}{3^2.27^2} + \frac{5.2^3}{3^4.27^3} \right.$
$\left. - \frac{10.2^4}{3^5.27^4} + \frac{22.2^5}{3^6.27^5} - \frac{154.2^6}{3^8.27^6} + .. \right\}.$

9. $9^{-2}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{27} - \frac{4}{9^3} + \frac{5}{9^4} - \frac{6}{9^5} + \frac{7}{9^6} \right.$
$\left. - \frac{8}{9^7} + \ldots \right\}.$

10. $64^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = 8 \left\{ 1 + \frac{1}{2.64} - \frac{1}{2^3.64^2} + \frac{1}{2^4.64^3} - \frac{5}{2^7.64^4} \right.$
$\left. + \frac{7}{2^8.64^5} - \frac{21}{2^{10}.64^6} \ldots \right\}$

---

11. $a^{-5} - 5a^{-6}x + 15a^{-7}x^2 - 35a^{-8}x^3 + 70a^{-9}x^4 - 126a^{-10}x^5$
$+ 210a^{-11}x^6 - 330a^{-12}x^7 \ldots$

12. $a^{-6} + 6a^{-7}x + 21a^{-8}x^2 + 56a^{-9}x^3 + 126a^{-10}x^4$
$+ 252a^{-11}x^5 + 462a^{-12}x^6 + 792a^{-13}x^7 \ldots$

13. $\frac{1}{64b^6} + \frac{3y}{64b^7} + \frac{21y^2}{256b^8} + \frac{7y^3}{64b^9} + \frac{63y^4}{512b^{10}} + \frac{63y^5}{512b^{11}}$
$+ \frac{231y^6}{2048b^{12}} + \frac{99y^7}{1024b^{13}} + \ldots$

14. $\frac{512}{c^9} - \frac{9216z}{c^{10}} + \frac{92\,160z^2}{c^{11}} - \frac{675\,840z^3}{c^{12}} + \frac{4\,055\,040z^4}{c^{13}}$
$- \frac{21\,086\,208z^5}{c^{14}} + \frac{98\,402\,304z^6}{c^{15}} - \frac{421\,724\,160z^7}{c^{16}} \cdots$

15. $\frac{1}{6561} + \frac{8x}{19683} + \frac{4x^2}{6561} + \frac{40x^3}{59049} + \frac{110x^4}{177\,147} + \frac{88x^5}{177\,147}$
$+ \frac{572x^6}{1\,594\,323} + \frac{1144x^7}{4\,782\,969} \cdots$

16. $\frac{1}{a^9} - \frac{9x}{2a^{10}} + \frac{45x^2}{4a^{11}} - \frac{165x^3}{8a^{12}} + \frac{495x^4}{16a^{13}} - \frac{1287x^5}{32a^{14}} + \frac{3003x^6}{64a^{15}}$
$- \frac{6435x^7}{128a^{16}} \cdots$

17. $1 - 10x + 55x^2 - 220x^3 + 715x^4 - 2002x^5 + 5005x^6$
$- 11\,440x^7 + \ldots$

18. $1 + 11y + 66y^2 + 286y^3 + 1001y^4 + 3003y^5 + 8008y^6$
$+ 19\,448y^7 + \ldots$

19. $\frac{1}{z^9} - \frac{9}{z^{10}} + \frac{45}{z^{11}} - \frac{165}{z^{12}} + \frac{495}{z^{13}} - \frac{1287}{z^{14}} + \frac{3003}{z^{15}} - \frac{6435}{z^{16}} + \cdots$

20. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \ldots$

21. $\frac{1}{a^{10}} - \frac{5x^3}{a^{12}} + \frac{15x^6}{a^{14}} - \frac{35x^9}{a^{16}} + \frac{70x^{12}}{a^{18}} - \frac{126x^{15}}{a^{20}} + \frac{210x^{18}}{a^{22}}$
$- \frac{330x^{21}}{a^{24}} + \cdots$

22. $\frac{1}{b^{24}} + \frac{8x^2}{b^{27}} + \frac{36x^4}{b^{30}} + \frac{120x^6}{b^{33}} + \frac{330x^8}{b^{36}} + \frac{792x^{10}}{b^{39}} + \frac{1716x^{12}}{b^{42}}$
$+ \frac{3432x^{14}}{b^{45}} + \cdots$

23. $\frac{1}{c^9} - \frac{18x^3}{c^{10}} + \frac{180x^6}{c^{11}} - \frac{1320x^9}{c^{12}} + \frac{7920x^{12}}{c^{13}} - \frac{41\,184x^{15}}{c^{14}}$
$+ \frac{192\,192x^{18}}{c^{15}} - \frac{823\,680x^{21}}{c^{16}} + \cdots$

24. $\frac{1}{a^{12}c^6} - \frac{6x^2}{a^{13}c^7} + \frac{21x^4}{a^{14}c^8} - \frac{56x^6}{a^{15}c^9} + \frac{126x^8}{a^{16}c^{10}} - \frac{252x^{10}}{a^{17}c^{11}} + \frac{462x^{12}}{a^{18}c^{12}}$
$- \frac{792x^{14}}{a^{19}c^{13}} + \cdots$

25. $\frac{1}{a^3} + \frac{6x^2}{a^3\sqrt{a}} + \frac{21x^4}{a^4} + \frac{56x^6}{a^4\sqrt{a}} + \frac{126x^8}{a^5} + \frac{252x^{10}}{a^5\sqrt{a}} + \frac{462x^{12}}{a^6}$
$+ \frac{792x^{14}}{a^6\sqrt{a}} + \cdots$

26. $\sqrt{b} + \frac{h}{2\sqrt{b}} - \frac{h^2}{8b\sqrt{b}} + \frac{h^3}{16b^2\sqrt{b}} - \frac{5h^4}{128b^3\sqrt{b}} + \frac{7h^5}{256b^4\sqrt{b}}$
$- \frac{21h^6}{1024b^5\sqrt{b}} + \frac{33h^7}{2048b^6\sqrt{b}} - \cdots$

27. $\sqrt[4]{b} - \frac{x}{4\sqrt[4]{b^3}} - \frac{3x^2}{32b\sqrt[4]{b^3}} - \frac{7x^3}{128b^2\sqrt[4]{b^3}} - \frac{77x^4}{2048b^3\sqrt[4]{b^3}} - \frac{231x^5}{8192b^4\sqrt[4]{b^3}}$
$- \frac{1463x^6}{65\,536b^5\sqrt[4]{b^3}} - \frac{4807x^7}{262\,144b^6\sqrt[4]{b^3}} - \cdots$

28. $\sqrt[5]{2a} + \frac{y}{5\sqrt[5]{16a^4}} - \frac{y^2}{25a\sqrt[5]{16a^4}} + \frac{3y^3}{250a^2\sqrt[5]{16a^4}} - \frac{21y^4}{5000a^3\sqrt[5]{16a^4}}$
$+ \frac{399y^5}{250\,000a^4\sqrt[5]{16a^4}} - \frac{399y^6}{625\,000a^5\sqrt[5]{16a^4}} + \frac{1653y^7}{6\,250\,000a^6\sqrt[5]{16a^4}}.$

29. $\sqrt[6]{2} + \frac{a}{6\sqrt[6]{2^5}} - \frac{5a^2}{144\sqrt[6]{2^5}} + \frac{55a^3}{5\,184\sqrt[6]{2^5}} - \frac{935a^4}{497\,664\sqrt[6]{2^5}}$
$+ \frac{4301a^5}{2\,985\,984\sqrt[6]{2^5}} - \frac{124\,729a^6}{429\,981\,696\sqrt[6]{2^5}} + \frac{623\,645a^7}{5\,159\,780\,352\sqrt[6]{2^5}} \cdots$

30. $x + \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^3} + \frac{a^3}{16x^5} - \frac{5a^4}{128x^7} + \frac{7a^5}{256x^9} - \frac{21a^6}{1024x^{11}}$
$+ \frac{33a^7}{2048x^{13}} \cdots$

31. $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} - \frac{1}{16a^5} - \frac{5}{128a^7} - \frac{7}{256a^9} - \frac{21}{1024a^{11}}$
$- \frac{33}{2048a^{13}} - \cdots$

32. $\sqrt[7]{a} + \frac{2b}{7\sqrt[7]{a^6}} - \frac{12b^2}{49a\sqrt[7]{a^6}} + \frac{104b^3}{343a^2\sqrt[7]{a^6}} - \frac{1040b^4}{2\,401a^3\sqrt[7]{a^6}}$
$+ \frac{11\,232b^5}{16\,807a^4\sqrt[7]{a^6}} - \frac{127\,296b^6}{117\,649a^5\sqrt[7]{a^6}} + \frac{10\,438\,272b^7}{5\,764\,801a^6\sqrt[7]{a^6}} \cdots$

33. $$1 + \frac{a}{9} - \frac{4a^2}{81} + \frac{68a^3}{2187} - \frac{442a^4}{19683} + \frac{3094a^5}{177147} - \frac{68068a^6}{4782969} + \frac{515372a^7}{43046721} \cdots$$

34. $$1 + \frac{y}{10} - \frac{9y^2}{200} + \frac{57y^3}{2000} - \frac{1653y^4}{80000} + \frac{64467y^5}{4000000} - \frac{1052961y^6}{80000000} + \frac{8874957y^7}{800000000} \cdots$$

35. $$1 + \frac{z^2}{9} - \frac{4z^4}{81} + \frac{68z^6}{2187} - \frac{442z^8}{19683} + \frac{3094z^{10}}{177147} - \frac{68068z^{12}}{4782969} + \frac{515372z^{14}}{43046721} \cdots$$

36. $$1 + \frac{3h}{4} - \frac{3h^2}{32} + \frac{5h^3}{128} - \frac{45h^4}{2048} + \frac{117h^5}{8192} - \frac{663h^6}{65536} + \frac{1989h^7}{262144} \cdots$$

37. $$\sqrt[7]{2^4} - \frac{4y^3}{7\sqrt[7]{2^3}} - \frac{3y^6}{49\sqrt[7]{2^3}} - \frac{5y^9}{343\sqrt[7]{2^3}} - \frac{85y^{12}}{19208\sqrt[7]{2^3}} - \frac{51y^{15}}{33614\sqrt[7]{2^3}} - \frac{527y^{18}}{941192\sqrt[7]{2^3}} - \frac{10013y^{21}}{46118408\sqrt[7]{2^3}} \cdots$$

38. $$\sqrt[5]{3^3} + \frac{3d^4}{5\sqrt[5]{3^2}} - \frac{d^8}{25\sqrt[5]{3^2}} + \frac{7d^{12}}{1125\sqrt[5]{3^2}} - \frac{7d^{16}}{5625\sqrt[5]{3^2}} + \frac{357d^{20}}{1265625\sqrt[5]{3^2}} - \frac{1309d^{24}}{18984375\sqrt[5]{3^2}} + \frac{187d^{28}}{284765625\sqrt[5]{3^2}} \cdots$$

39. $$a^2\sqrt[5]{a^2} - \frac{4b}{5\sqrt[5]{a^3}} - \frac{2b^2}{25a^3\sqrt[5]{a^3}} - \frac{4b^3}{125a^6\sqrt[5]{a^3}} - \frac{11b^4}{625a^9\sqrt[5]{a^3}} - \frac{176b^5}{15625a^{12}\sqrt[5]{a^3}} - \frac{616b^6}{78125a^{15}\sqrt[5]{a^3}} - \frac{2288b^7}{390625a^{18}\sqrt[5]{a^3}} \cdots$$

40. $$y\sqrt[4]{y^3} - \frac{7b^3}{8\sqrt[4]{y}} - \frac{7b^6}{128y^2\sqrt[4]{y}} - \frac{21b^9}{1024y^4\sqrt[4]{y}} - \frac{357b^{12}}{32768y^6\sqrt[4]{y}} - \frac{1785b^{15}}{262144y^8\sqrt[4]{y}} - \frac{19635b^{18}}{4194304y^{10}\sqrt[4]{y}} - \frac{115005b^{21}}{33554432y^{12}\sqrt[4]{y}} \cdots$$

41. $\frac{1}{a\sqrt{a}} - \frac{1}{2a^4\sqrt{a}} + \frac{3}{8a^7\sqrt{a}} - \frac{5}{16a^{10}\sqrt{a}} + \frac{35}{128a^{13}\sqrt{a}}$
$- \frac{63}{256a^{16}\sqrt{a}} + \frac{231}{1\,024a^{19}\sqrt{a}} - \frac{429}{2\,048a^{22}\sqrt{a}} \cdots$

42. $\frac{1}{x} + \frac{a}{2x^3} + \frac{3a^2}{8x^5} + \frac{5a^3}{16x^7} + \frac{35a^4}{128x^9} + \frac{63a^5}{256x^{11}} + \frac{231a^6}{1\,024x^{13}}$
$+ \frac{429a^7}{2\,048x^{15}} \cdots$

43. $1 + \frac{x^5}{3} + \frac{2x^{10}}{9} + \frac{14x^{15}}{81} + \frac{35x^{20}}{243} + \frac{91x^{25}}{729} + \frac{728x^{30}}{6\,561}$
$+ \frac{1\,976x^{35}}{19\,683} \cdots$

44. $1 - \frac{2d}{5} + \frac{12d^2}{25} - \frac{88d^3}{125} + \frac{704d^4}{625} - \frac{29\,568d^5}{15\,625} + \frac{256\,256d^6}{78\,125}$
$- \frac{2\,269\,696d^7}{390\,625} \cdots$

45. $\frac{1}{8} - \frac{3h}{256} + \frac{3h^2}{2048} - \frac{13h^3}{65\,536} + \frac{117h^4}{4\,194\,304} - \frac{2\,691h^5}{671\,088\,640}$
$+ \frac{6\,279h^6}{10\,737\,418\,240} - \frac{29\,601h^7}{343\,597\,383\,680} \cdots$

46. $\frac{1}{27} + \frac{x^2}{81} + \frac{5x^4}{1\,458} + \frac{35x^6}{39\,366} + \frac{35x^8}{157\,464} + \frac{77x^{10}}{1\,417\,176}$
$+ \frac{1\,001x^{12}}{76\,527\,504} + \frac{715x^{14}}{229\,582\,512} \cdots$

47. $\frac{1}{a^5} - \frac{15y^4}{7a^{12}} + \frac{270y^8}{49a^{19}} - \frac{5\,130y^{12}}{343a^{26}} + \frac{100\,035y^{16}}{2\,401a^{33}} - \frac{1\,980\,693y^{20}}{16\,807a^{40}}$
$+ \frac{39\,613\,860y^{24}}{117\,649a^{47}} - \frac{5\,585\,554\,260y^{28}}{5\,764\,801a^{54}} \cdots$

48. $\sqrt[4]{a} - \frac{\sqrt[12]{a^9x^4}}{2b} + \frac{3a\sqrt[12]{a^3x^8}}{8b^2} - \frac{5ax\sqrt[4]{a^3}}{16b^3} + \frac{35a^2x\sqrt[12]{a^3x^4}}{128b^4}$
$- \frac{63a^2x\sqrt[12]{a^9x^8}}{256b^5} + \frac{231a^3x^2\sqrt[4]{a}}{1\,024b^6} - \frac{429a^3x^2\sqrt[12]{a^9x^4}}{2\,048b^7} \cdots$

49 $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[9]{a^2}} - \frac{x^3\sqrt[3]{x}}{3a\sqrt[9]{a^8}} + \frac{2x^6\sqrt[3]{x}}{9a^3\sqrt[9]{a^5}} - \frac{14x^9\sqrt[3]{x}}{81a^5\sqrt[9]{a^2}} + \frac{35x^{12}\sqrt[3]{x}}{243a^6\sqrt[9]{a^8}}$

$- \frac{91x^{15}\sqrt[3]{x}}{729a^8\sqrt[9]{a^5}} + \frac{728x^{18}\sqrt[3]{x}}{6\,561a^{10}\sqrt[9]{a^2}} - \frac{1\,976x^{21}\sqrt[9]{x}}{19\,683a^{11}\sqrt[9]{a^8}}\cdots$

50. $2a\sqrt{2a} + \frac{24a^2\sqrt{2a}}{x^2} + \frac{240a^3\sqrt{2a}}{x^4} + \frac{2\,240a^4\sqrt{2a}}{x^6}$

$+ \frac{20\,160a^5\sqrt{2a}}{x^8} + \frac{177\,408a^6\sqrt{2a}}{x^{10}} + \frac{1\,537\,536a^7\sqrt{2a}}{x^{12}}$

$+ \frac{13\,178\,880a^8\sqrt{2a}}{x^{14}}\cdots$

51. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{x^3}{4}} + \frac{21x}{128}\sqrt[4]{\frac{x^2}{2}} - \frac{77x^2\sqrt[4]{x}}{1\,024} + \frac{1\,155x^3}{16\,384\sqrt[4]{8}}$

$- \frac{4\,389x^3}{131\,072}\sqrt[4]{\frac{x^3}{4}} + \frac{33\,649x^4}{2\,097\,152}\sqrt[4]{\frac{x^2}{2}} - \frac{129\,789x^5\sqrt[4]{x}}{16\,777\,216}\cdots$

52. $\frac{1}{a^6} - \frac{3x^3}{a^8} + \frac{6x^6}{a^{10}} - \frac{10x^9}{a^{12}} + \frac{15x^{12}}{a^{14}} - \frac{21x^{15}}{a^{16}} + \frac{28x^{18}}{a^{18}}$

$- \frac{36x^{21}}{a^{20}}\cdots$

53. $\frac{1}{a^2} + \frac{2x^3}{3a^5} + \frac{5x^6}{9a^8} + \frac{40x^9}{81a^{11}} + \frac{110x^{12}}{243a^{14}} + \frac{308x^{15}}{729a^{17}}$

$+ \frac{2\,618x^{18}}{6\,561a^{20}} + \frac{7\,480x^{21}}{19\,683x^{23}}\cdots$

54. $a\sqrt[4]{a^3} - \frac{7a\sqrt[12]{a^3b^4}}{2} + \frac{35\sqrt[12]{a^9b^8}}{8} - \frac{35b\sqrt[4]{a}}{16} + \frac{35b\sqrt[3]{b}}{128\sqrt[4]{a}}$

$+ \frac{7b\sqrt[3]{b^2}}{256\sqrt[4]{a^3}} + \frac{7b^2}{1\,024a\sqrt[4]{a}} + \frac{5b^2\sqrt[3]{b}}{2048a\sqrt[4]{a^3}}\cdots$

---

55. $\frac{1}{a} - \frac{p}{a^2} + \frac{p^2}{a^3} - \frac{p^3}{a^4} + \frac{p^4}{a^5} - \frac{p^5}{a^6} + \frac{p^6}{a^7} - \frac{p^7}{a^8}\cdots$

56. $\frac{1}{b^6} - \frac{3r}{b^8} + \frac{6r^2}{b^{10}} - \frac{10r^3}{b^{12}} + \frac{15r^4}{b^{14}} - \frac{21r^5}{b^{16}} + \frac{28r^6}{b^{18}} - \frac{36r^7}{b^{20}} \cdot\cdot$

57. $-\left(\frac{1}{H^5} + \frac{5t}{H^6} + \frac{15t^2}{H^7} + \frac{35t^3}{H^8} + \frac{70t^4}{H^9} + \frac{126t^5}{H^{10}} + \frac{210t^6}{H^{11}}\right.$

$\left. + \frac{330t^7}{H^{12}} \cdots\right)$

58. $\frac{1}{T^4} + \frac{4v}{T^5} + \frac{10v^2}{T^6} + \frac{20v^3}{T^7} + \frac{35v^4}{T^8} + \frac{56v^5}{T^9} + \frac{84v^6}{T^{10}} + \frac{120v^7}{T^{11}} \cdot\cdot$

59. $-\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{1}{4a^2\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{1}{8a^4\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{7}{96a^6\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{35}{768a^8\sqrt[3]{4a^2}}\right.$

$\left. + \frac{91}{3\,072a^{10}\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{91}{4\,608a^{12}\sqrt[3]{4a^2}} + \frac{247}{18\,432a^{14}\sqrt[3]{4a^2}} \cdot\cdot\right\}$

60. $\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}} - \frac{2}{7x^5\sqrt[7]{x^5}} + \frac{16}{49x^{10}\sqrt[7]{x^5}} - \frac{160}{343x^{15}\sqrt[7]{x^5}} + \frac{1\,760}{2\,401x^{20}\sqrt[7]{x^5}}$

$- \frac{20\,416}{16\,807x^{25}\sqrt[7]{x^5}} + \frac{244\,992}{117\,649x^{30}\sqrt[7]{x^5}} - \frac{21\,069\,312}{5\,764\,801x^{35}\sqrt[7]{x^5}} \cdot\cdot$

61. $\frac{1}{\sqrt[15]{81^3x^8}} + \frac{8\sqrt[4]{a}}{15x\sqrt[5]{81x}} + \frac{8\sqrt{a}}{25x\sqrt[15]{81^3x^{13}}} + \frac{224\sqrt[4]{a^3}}{1\,125x^2\sqrt[15]{81^3x^8}}$

$+ \frac{2\,128a}{16\,875x^3\sqrt[5]{81x}} + \frac{34\,048a\sqrt[4]{a}}{421\,875x^3\sqrt[15]{81^3x^{13}}}$

$+ \frac{987\,392a\sqrt{a}}{18\,984\,375x^4\sqrt[15]{81^3x^8}} + \frac{9\,591\,808a\sqrt[4]{a^3}}{284\,765\,625x^5\sqrt[5]{81x}} \cdots$

62. $\frac{1}{\sqrt[5]{a^4y^2}} - \frac{2\sqrt[3]{x}}{5ay\sqrt[5]{a^4y^2}} + \frac{7\sqrt[3]{x^2}}{25a^2y^2\sqrt[5]{a^4y^2}} - \frac{28x}{125a^3y^3\sqrt[5]{a^4y^2}}$

$+ \frac{119x\sqrt[3]{x}}{625a^4y^4\sqrt[5]{a^4y^2}} - \frac{2\,618x\sqrt[3]{x^2}}{15\,625a^5y^5\sqrt[5]{a^4y^2}} + \frac{11\,781x^2}{78\,125a^6y^6\sqrt[5]{a^4y^2}}$

$- \frac{53\,856x^2\sqrt[3]{x}}{390\,625a^7y^7\sqrt[5]{a^4y^2}} \cdots$

63. $z^3\sqrt[5]{81z} + \frac{4\sqrt[5]{h}}{5\sqrt[5]{3z^4}} - \frac{2\sqrt[5]{h^2}}{75z^4\sqrt[5]{3z^4}} + \frac{4\sqrt[5]{h^3}}{1\,125z^8\sqrt[5]{3z^4}}$
$- \frac{11\sqrt[5]{h^4}}{16\,875z^{12}\sqrt[5]{3z^4}} + \frac{176h}{1\,265\,625z^{16}\sqrt[5]{3z^4}} - \frac{616h\sqrt[5]{h}}{18\,984\,375z^{20}\sqrt[5]{3z^4}}$
$+ \frac{2\,288h\sqrt[5]{h^2}}{284\,765\,625z^{24}\sqrt[5]{3z^4}} \ldots$

---

64. 3,162 277 6.. **65.** 7,280 109 8.. **66.** 4,431 047..
67. 3,107 232.. **68.** 2,871 621 9.. **69.** 3,038 504 7..
70. 4,073 062.. **71.** 5,999 889 78.. **72.** 0,309 838 74..
73. 0,954 640.. **74.** 5,873 670 08.. **75.** 4,330 127 03..
76. 3,878 277 96.. **77.** 2,768 621 7.. **78.** 5,028 970 93..
79. 6,003 033 58.. **80.** 2,021 744 21.. **81.** 18,566 355..
82. 4,998 999 69.. **83.** 3,000 457 03.. **84.** 1,028 901..
85. 2,000 020 83.. **86.** 6,846 323 7.. **87.** 4,083 680..

---

88. $(b + cx)^4x^4 + 4a(b + cx)^3x^3 + 6a^2(b + cx)^2x^2$
$+ 4a^3(b + cx)x + a^4.$

89. $a^5 - \frac{5}{6} a^4(3b - 2cx)x + \frac{5}{18} a^3(3b - 2cx)^2x^2$
$- \frac{5}{108} a^2(3b - 2cx)^3x^3 + \frac{5}{1296} a(3b - 2cx)^4x^4$
$- \frac{1}{7776} (3b - 2cx)^5x^5.$

90. $1 + 10ax + 55a^2x^2 + 200a^3x^3 + 530a^4x^4 + 1\,052a^5x^5$
$+ 1\,590a^6x^6 + 1\,800a^7x^7 + 1\,485a^8x^8 + 810a^9x^9$
$+ 243a^{10}x^{10}.$

91. $1 + 14x + 105x^2 + 560x^3 + 2\,345x^4 + 8\,106x^5 + 23\,849x^6$
$+ 60\,860x^7 + 136\,395x^8 + 270\,690x^9 + 478\,051x^{10}$
$+ 753\,144x^{11} + 1\,058\,715x^{12} + 1\,325\,030x^{13}$
$+ 1\,469\,835x^{14} + 1\,434\,076x^{15} + 1\,215\,984x^{16}$
$+ 880\,320x^{17} + 528\,640x^{18} + 250\,880x^{19} + 86\,016x^{20}$
$+ 16\,384x^{21}.$

92. $1 + 5a + 20a^2 + 65a^3 + 165a^4 + 371a^5 + 720a^6 + 1\,205a^7 + 1\,810a^8 + 2\,360a^9 + 2\,672a^{10} + 2\,670a^{11} + 2\,205a^{12} + 1\,485a^{13} + 810a^{14} + 243a^{15}.$

93. $\frac{1}{(b+b^2+b^3)^3} - \frac{3a}{(b+b^2+b^3)^4} + \frac{6a^2}{(b+b^2+b^3)^5} - \frac{10a^3}{(b+b^2+b^3)^6} + \frac{15a^4}{(b+b^2+b^3)^7} - \frac{21a^5}{(b+b^2+b^3)^8} + \frac{28a^6}{(b+b^2+b^3)^9} - \frac{36a^7}{(b+b^2+b^3)^{10}}\cdots$

94. $1 - 3x + \frac{5x^2}{4} + \frac{5x^3}{2} + \frac{119x^4}{24} - \frac{329x^5}{24} - \frac{2\,429x^6}{864} + \frac{155x^7}{12} + \frac{90\,599x^8}{2\,304}\cdots$

95. $1 - \frac{2y}{3} + \frac{2y^2}{9} - \frac{13y^3}{81} + \frac{215y^4}{972} - \frac{143y^5}{729} + \frac{863y^6}{6\,561} - \frac{1\,963y^7}{19\,683} + \frac{43\,697y^8}{472\,392}\cdots$

96. $1 - \frac{3x}{4} + \frac{33x^2}{32} - \frac{97x^3}{128} - \frac{629x^4}{2\,048} + \frac{595x^5}{8\,192} + \frac{23\,023x^6}{196\,608} - \frac{54\,283x^7}{786\,432} - \frac{1\,001\,933x^8}{8\,388\,608}\cdots$

97. $1 + \frac{5x}{9} - \frac{113x^2}{162} + \frac{24\,383x^3}{30\,618} - \frac{857\,029x^4}{5\,511\,240} + \frac{8\,717\,903x^5}{49\,601\,160}\cdots$

CHAPITRE XVI

DES DÉTERMINANTS

---

1. Des déterminants en général.

LXXXIII

1. $ad - bc$. **2.** $ax' - a'x$. **3.** $-a_1b_2 + a_2b_1$. **4.** $b^2 - a^2$.

5. $-a^2b + ab^2$. **6.** $x^2 - x$. **7.** $\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a-b)$.

8. $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$. **9.** $12 - 10 = 2$. **10.** $42 - 15 = 27$.

11. $15 - 13 = 2$. **12.** $21 - 10 = 11$. **13.** $84 - 55 = 29$.

14. $55 - 84 = -29$. **15.** $70 - 54 = 16$. **16.** $54 - 70 = -16$.

17. $160 - 150 = 10$. **18.** $150 - 160 = -10$. **19.** $92 - 85 = 7$.

20. $85 - 92 = -7$. **21.** $104 - 70 = 34$. **22.** $54 - 35 = 19$.

23. $54 - 35 = 19$. **24.** $28 - 14 = 14$. **25.** $28 - 14 = 14$. **26.** $2 - \frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$.

27. $\frac{84}{18} - \frac{49}{18} = \frac{35}{18}$. **28.** $a_1b_2 - a_2b_1$.

29. $ma_1b_2 - ma_2b_1 = m(a_1b_2 - a_2b_1)$. **30.** $x_1y_2 - x_2y_1$.

31. $px_1y_2 - px_2y_1 = p(x_1y_2 - x_2y_1)$.

---

32. $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

33. $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

34. $a^2 + cd^2 + b^2c - ac^2 - abd - bd$.

35. $-(a^2n + c^2m + b - cn - ac - abm)$.

36. $\alpha^2 + mp\gamma + no\beta - o\gamma - np\alpha - m\alpha\beta$.

37. $4 + 84 + 90 - 35 - 36 - 24 = 83$.

38. $15 + 84 + 180 - 20 - 337\frac{1}{2} - 33\frac{3}{5} = -112{,}1$.

39. $45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$.

40. $18 + 5 + 28 - 2 - 280 - 4\frac{1}{2} = -235\frac{1}{2}$.

41. $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

42. $a'b''c''' + b'c''a''' + c'a''b''' - c'b''a''' - a'c''b''' - b'a''c'''$.

43. $a_1^1a_2^2a_3^3 + a_2^1a_3^2a_1^3 + a_3^1a_1^2a_2^3 - a_3^1a_2^2a_1^3 - a_1^1a_3^2a_2^3 - a_2^1a_1^2a_3^3$.

44. $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

45. (1) $a_1^i a_2^k a_3^l + a_2^i a_3^k a_1^l + a_3^i a_1^k a_2^l - a_3^i a_2^k a_1^l - a_1^i a_3^k a_2^l$
$- a_2^i a_1^k a_3^l$.

46. $x_{1a} x_{2b} x_{3c} + x_{2a} x_{3b} x_{1c} + x_{3a} x_{1b} x_{2c} - x_{3a} x_{2b} x_{1c}$
$- x_{1a} x_{3b} x_{2c} - x_{2a} x_{1b} x_{3c}$.

47. $27 + 224 + 60 - 42 - 120 - 72 = 77$.

48. $72 + 120 + 42 - 60 - 224 - 27 = -77$.

49. $224 + 60 + 27 - 120 - 72 - 42 = 77$.

50. $84 + 176 + 60 - 33 - 280 - 96 = -89$.

51. $96 + 33 + 280 - 176 - 60 - 84 = 89$.

52. $60 + 84 + 176 - 280 - 96 - 33 = -89$.

53. $96 + 1700 + 45 - 68 - 720 - 150 = 903$.

54. $96 + 45 + 1700 - 68 - 720 - 150 = 903$.

LXXXIV

2. Transformation des déterminants.

1. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$. $72 - 63 = 9$. **2.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$. $15 - 8 = 7$.

3. $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$. $24 - 35 = -11$. **4.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. $a_1 b_2 - b_1 a_2$.

5. $\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{2}{3} \\ 4\frac{1}{5} & 3\frac{1}{5} \end{vmatrix}$. $4 - 2\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$. $\left\{ \begin{matrix} 120 + 28 + 108 \\ -45 - 126 \quad -64 \end{matrix} \right\} = 21$.

(1) On est prié de supprimer a_4^m dans l'exercice 45, et de lire le 46 ainsi $\Sigma \pm x_{1a} x_{2b} x_{3c}$.

7. $\begin{vmatrix} 11 & 7 & 17 \\ 13 & 9 & 8 \\ 15 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. $\left.\begin{matrix} 297 + 884 + 840 \\ -2295 - 352 - 273 \end{matrix}\right\} = -899.$

8. $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ 2 & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix}$.; $b(a^2 - 4b) + c(3b - ac) + 2(4c - 3a).$

9. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 & 13 \\ 1 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 11 & 10 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 5 \\ 11 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 6 \\ 15 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$.

---

12. $-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 13. $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 14. $+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

15. $+\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 16. $+\begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 10 \end{vmatrix}$. 17. $+\begin{vmatrix} \cos b & \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos b & \cos a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

---

18. $-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$. 19. $+\begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & x^2 \end{vmatrix}$. 20. $-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $+\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. 22. $+\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$. 23. $-\begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

24. $+\begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 8 & 15 & 10 \\ 13 & 9 & 12 \end{vmatrix}$. 25. $+\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 5 \end{vmatrix}$. 26. $+\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

27. $-\begin{vmatrix} 7 & 1 & 12 \\ 4 & 15 & 2 \\ 8 & 6 & 9 \end{vmatrix}$. 28. $-\begin{vmatrix} a_2 & k_2 & m_2 \\ a_1 & k_1 & m_1 \\ a_3 & k_3 & m_3 \end{vmatrix}$. 29. $-\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 3 & b & c \\ 4 & c & d \end{vmatrix}$.

LXXXV

1. $15a^2b\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3b\end{vmatrix}$. **2.** $xy^2\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ 1 & y\end{vmatrix}$. **3.** $ab^2cx^2\begin{vmatrix}1 & x\\ b & 1\end{vmatrix}$.

4. $30\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}$. **5.** $75\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}$. **6.** $21\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 2\end{vmatrix}$.

7. $\frac{7}{4}\begin{vmatrix}2 & 9\\ 1 & 8\end{vmatrix}$. **8.** $\frac{11.21}{60}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}$. **9.** $\frac{5}{9}\begin{vmatrix}6 & 5\\ 5 & 4\end{vmatrix}$.

10. $\frac{9}{28}\begin{vmatrix}3 & 11\\ 1 & 15\end{vmatrix}$. **11.** $189\begin{vmatrix}5 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$. **12.** $2520\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 2\\ 6 & 8 & 9\end{vmatrix}$.

13. $36960\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$. **14.** $36960\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}$. **15.** $\frac{5}{9}\begin{vmatrix}3 & 10 & 1\\ 16 & 27 & 4\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix}$.

---

16. $-6ab\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2a & 3b^2\end{vmatrix}$. **17.** $-90\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$.

18. $-30\begin{vmatrix}a & -b & c\\ 2a_2 & 2b_2 & 5c_2\\ 7d & -8e & 3k\end{vmatrix}$. **19.** $-6\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 5 & 3 & -7\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix}$.

20. $-630\begin{vmatrix}3 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 21\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}$. **21.** $-\frac{1}{40}\begin{vmatrix}5 & 10 & -14\\ -6 & -11 & 15\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}$.

22. $-\frac{1}{20}\begin{vmatrix}2a & 30b & 3c\\ -15a^2 & 5b^3 & -c\\ 4z & -y & 5\end{vmatrix}$.

---

23. $\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}$. **24.** $mxy\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & x & y\\ n & x^2 & y^2\end{vmatrix}$. **25.** $6\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 6 & 1 & 14\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}$.

26. $\frac{3}{70}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 14 & 1 \\ 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}$. **27.** $\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$.

28. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 12 & 1 \\ 84 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$. **29.** $\frac{abcd}{8}\begin{vmatrix} 1 & 6a & 10a^2 & 2a^3 \\ 1 & 48b & 2b^2 & 4b^3 \\ 1 & 4c & 20c^2 & 16c^3 \\ 1 & d & d^2 & 3d^3 \end{vmatrix}$.

30. $\frac{1}{c}\begin{vmatrix} ac^3 & bc^3 & 1 & c^3d \\ a^3 & 2b & 1 & 2 \\ a^4 & 5 & 0 & d^4 \\ 3c^2 & b^3c^2 & 1 & c^2d^2 \end{vmatrix}$. **31.** $\frac{1}{4c^3z^4}\begin{vmatrix} 6z^2 & c^3x^5z^2 & 2c^3y^2 & 2az^2 \\ 2b^2z^2 & a^2c^3z^2 & 14c^3 & 2z^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x^2z^2 & c^3y^3z^2 & 2bc^3 & 16z^2 \end{vmatrix}$.

LXXXVI

1. $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. **2.** $91\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. **3.** $ab\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = ab(a-b)$.

4. $\frac{1}{\cos a}\begin{vmatrix} 1 & \cos a \\ 1 & \cos a \end{vmatrix} = 0$. **5.** $4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

6. $3\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 9 \\ \sqrt{2} & 9 \end{vmatrix} = 0$. **7.** $a^2\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ a^2 & a^3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$.

8. $a^m\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & a^2 & a^2 \\ 7 & a^4 & a^4 \end{vmatrix} = 0$. **9.** $a^n\begin{vmatrix} b & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ c & 1 & 1 \\ d & a & a \end{vmatrix} = 0$.

10. $3\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

LXXXVII

1. $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. **2.** $-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}$. **3.** $c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

4. $-a_2^3\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$. **5.** $8\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$. **6.** $10\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$.

7. $-60\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$. **8.** $-11\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}$. **9.** $a^2b^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

10. $-36\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$. **11.** $d_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. **12.** $2\begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 5 & 11 & 13 \\ 9 & 17 & 4 \end{vmatrix}$.

13. $x_3z_2\begin{vmatrix} 7 & y_1 \\ 11 & y_4 \end{vmatrix}$. **14.** $12 . 14 . 11\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

15. $-16 . 12 . 2\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$. **16.** $-a_1d_5e_2\begin{vmatrix} b_3 & c^3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix}$.

17. $a_1b_2c_3\begin{vmatrix} d_4 & 0 \\ d_5 & e_5 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3d_4e_5$.

---

18. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & x^2 & y^2 \\ \underline{1} & \underline{1} & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$.(1) **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & b^2 & x \\ \underline{1} & \underline{1} & c^2 & y \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & 3 & 8 \\ \underline{1} & \underline{1} & 2 & 12 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & 7 & 3 \\ \underline{1} & \underline{1} & 15 & 20 \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & 5 & 11 \\ \underline{1} & \underline{1} & 13 & 7 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & 2 & x \\ \underline{1} & \underline{1} & 5 & y \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & 1 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 8 & 11 & 7 & \underline{1} \\ 5 & 4 & 9 & \underline{1} \\ 2 & 6 & 13 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

(1) Les éléments soulignés peuvent être quelconques.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & x & 1 & 3 \\ \underline{1} & y & 7 & 8 \\ \underline{1} & z & 10 & 6 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \underline{1} & a_2 & b_2 & c_2 \\ \underline{1} & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 \\ \underline{1} & 2 & \frac{1}{3} & 3 & 7 \\ \underline{1} & 3 & 5 & \frac{1}{4} & 3 \\ \underline{1} & 1 & 6 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

LXXXVIII

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 11 & 26 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 47 & 68 \\ 0 & 25 & 36 \\ 1 & 7 & 11 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 15 & 26 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

6. $\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 6a^2 - 4a^3x^2 & 3a - a^3b \\ 0 & 3 - 4b^2x^2 & 3x - b^3 \\ 3 & 4x^2 & b \end{vmatrix}$.

7. $\frac{1}{a'a''}\begin{vmatrix} 0 & a'b - ab' & a'c - ac' \\ 0 & a''b' - a'b'' & a''c' - a'c'' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

8. $\frac{1}{mx}\begin{vmatrix} 0 & bm-an & cm-ap \\ 0 & nx-my & px-mz \\ x & y & z \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 22 & -11 & 17 & -11 \\ 7 & 2 & -8 & 5 \end{vmatrix}$.

10. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 7 & -9 & -12 \\ 0 & -15 & -10 & 1 \\ 0 & 33 & -35 & 22 \\ 1 & -7 & 12 & -5 \end{vmatrix}$. **11.** $-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -17 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -7 \\ 0 & 8 & -21 & 12 \\ 0 & 11 & 74 & 9 \end{vmatrix}$.

12. $3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -27 & 3 \\ 2 & -4 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & -15 & 2 \end{vmatrix}$.

13. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c-ad & d & 3-bd & e-2d \\ 4-a^2 & a & d-ab & 2-2a \\ 3-ab & b & 1-b^2 & c-2b \end{vmatrix}.$$

14. $$\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ ay - a^3x^2 & axy - a^3y^2 & a^3 & z - a^4 \\ a^3 - x^2yz & az - y^3z & yz & 2 - ayz \\ a^2 - x^2z & ax^2 - y^2z & z & 1 - az \end{vmatrix}.$$

LXXXIX

1. $$\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 2 & x_2 & y_2 \\ 3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2. $$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & u_1 & x_2 \\ y & v_1 & y_2 \\ z & w_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. $$\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

5. $$\begin{vmatrix} 5 & y^4 & z^4 \\ 7 & y^2 & z^2 \\ 9 & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

6. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. $\begin{vmatrix} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 2 & x_2 & y_2 \\ 5 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & x_1 & y_1 \\ n & x_2 & y_2 \\ p & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} x_1 & 2 & z_1 \\ x_2 & 3 & z_2 \\ x_3 & 5 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2 & z_1 \\ \alpha^3 & 3 & z_2 \\ \alpha^4 & 5 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \beta & z_1 \\ x_2 & \gamma & z_2 \\ x_3 & \delta & z_3 \end{vmatrix}$

$- \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta & z_1 \\ \alpha^3 & \gamma & z_2 \\ \alpha^4 & \delta & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha^2 & y_1 & z_1 \\ \alpha^3 & y_2 & z_2 \\ \alpha^4 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

---

10. $\begin{vmatrix} x_1 + z_1 & y_1 \\ x_2 + z_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + z_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$ 13. $\begin{vmatrix} x_1 + \alpha_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + \alpha_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 + \alpha_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 - a & y_2 - b & z_2 - c \\ x_3 & 2 & z_3 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 10 & y_1 & z_1 \\ 10 & y_2 & z_2 \\ 10 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & y_1 & z_1 \\ 10a & b & c \\ 10 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} +10 & y_1 & z_1 \\ +10a & y_2 - b & z_2 - c \\ -5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

$$= \begin{vmatrix} 10 & y_1 & z_1 \\ 10-10a & y_2-b & z_2-c \\ 10 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 10 & y_1 & z_1 \\ 10a & y_2-b & z_2-c \\ -5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & y_1 & z_1 \\ 10 & y_2-b & z_2-c \\ 5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

XC

3. Des déterminants mineurs.

1. $x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

2. $a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$

3. $-3 \begin{vmatrix} 2 & z_1 \\ 5 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & 2 \\ x_3 & 5 \end{vmatrix}.$

4. $a \begin{vmatrix} x_2 & ay \\ ax & y^2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ ax & y^2 \end{vmatrix} + a^4 \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ x^2 & ay \end{vmatrix}$

$= axy \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} + a^4x^2y \begin{vmatrix} x & y^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}.$

5. $34 \begin{vmatrix} 28 & 17 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} + 41 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 28 & 17 \end{vmatrix}.$

6. $-13 \begin{vmatrix} 41 & 20 \\ 54 & 22 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 18 & 27 \\ 54 & 22 \end{vmatrix} - 17 \begin{vmatrix} 18 & 27 \\ 41 & 20 \end{vmatrix}.$

7. $-x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & y_2 \\ a_3 & b_3 & y_3 \\ a_4 & b_4 & y_4 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & y_1 \\ a_3 & b_3 & y_3 \\ a_4 & b_4 & y_4 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & y_2 \\ a_4 & b_4 & y_4 \end{vmatrix}$

$+ x_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & y_2 \\ a_3 & b_3 & y_3 \end{vmatrix}.$

8. $$a_1^3\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_2^3\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix} + a_3^3\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix}$$
$$- a_4^3\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \end{vmatrix}.$$

9. $$-7\begin{vmatrix} 9 & 18 & 23 \\ 27 & 37 & 11 \\ 8 & 6 & 12 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 11 & 13 & 2 \\ 27 & 37 & 11 \\ 8 & 6 & 12 \end{vmatrix} - 19\begin{vmatrix} 11 & 13 & 2 \\ 9 & 18 & 23 \\ 8 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$
$$+ 31\begin{vmatrix} 11 & 13 & 2 \\ 9 & 18 & 23 \\ 27 & 37 & 11 \end{vmatrix}.$$

---

10. $$b_1y_2\begin{vmatrix} a_3 & z_3 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix} - b_1y_3\begin{vmatrix} a_2 & z_2 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix} + b_1y_4\begin{vmatrix} a_2 & z_2 \\ a_3 & z_3 \end{vmatrix} - b_2y_1\begin{vmatrix} a_3 & z_3 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix}$$
$$+ b_2y_3\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix} - b_2y_4\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_3 & z_3 \end{vmatrix} + b_3y_1\begin{vmatrix} a_2 & z_2 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix} - b_3y_2\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_4 & z_4 \end{vmatrix}$$
$$+ b_3y_4\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_2 & z_2 \end{vmatrix} - b_4y_1\begin{vmatrix} a_2 & z_2 \\ a_3 & z_3 \end{vmatrix} + b_4y_2\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_3 & z_3 \end{vmatrix} - b_4y_3\begin{vmatrix} a_1 & z_1 \\ a_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

11. $$-\delta c\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \delta x_3\begin{vmatrix} a & y_1 \\ b & y_2 \end{vmatrix} - \delta y_3\begin{vmatrix} a & x_1 \\ b & x_2 \end{vmatrix} + d\gamma\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$
$$- dx_3\begin{vmatrix} \alpha & y_1 \\ \beta & y_2 \end{vmatrix} + dy_3\begin{vmatrix} \alpha & x_1 \\ \beta & x_2 \end{vmatrix} - x_4\gamma\begin{vmatrix} a & y_1 \\ b & y_2 \end{vmatrix} + x_4c\begin{vmatrix} \alpha & y_1 \\ \beta & y_2 \end{vmatrix}$$
$$- x_4y_3\begin{vmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{vmatrix} + y_4\gamma\begin{vmatrix} a & x_1 \\ b & x_2 \end{vmatrix} - y_4c\begin{vmatrix} \alpha & x_1 \\ \beta & x_2 \end{vmatrix} + y_4x_3\begin{vmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{vmatrix}.$$

12. $$8.13\begin{vmatrix} 23 & 31 \\ 43 & 40 \end{vmatrix} - 8.18\begin{vmatrix} 11 & 20 \\ 43 & 40 \end{vmatrix} + 8.7\begin{vmatrix} 11 & 20 \\ 23 & 31 \end{vmatrix} - 16.15\begin{vmatrix} 23 & 31 \\ 43 & 40 \end{vmatrix}$$
$$+ 16.18\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 43 & 40 \end{vmatrix} - 16.7\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 23 & 31 \end{vmatrix} + 14.15\begin{vmatrix} 11 & 20 \\ 43 & 40 \end{vmatrix}$$

$$- 14.13\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 43 & 40 \end{vmatrix} + 14.7\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} - 19.15\begin{vmatrix} 11 & 20 \\ 23 & 31 \end{vmatrix}$$

$$+ 19.13\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 23 & 31 \end{vmatrix} - 19.18\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}.$$

13. $$+ 90c^2\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 120ac\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 30bc\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$- 20acd\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 40a^2c\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 10abc\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$+ 70bcd\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 105bc^2\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 35b^2c\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 8c & 4b \end{vmatrix}$$

$$- 20c^2d\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ -11 & 6c \end{vmatrix} + 30c^3\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ -11 & 6c \end{vmatrix} - 40ac^2\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 8c & 4b \end{vmatrix}$$

$$- 30cd^2\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 40ad^2\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 10bd^2\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$+ 20acd\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 80a^2d\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 20abd\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$- 70bcd\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 210bcd\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 70b^2d\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 8c & 4b \end{vmatrix}$$

$$+ 20c^2d\begin{vmatrix} 8c & 4b \\ -11 & 6c \end{vmatrix} + 60c^2d\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ -11 & 6c \end{vmatrix} - 80acd\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 8c & 4b \end{vmatrix}$$

$$+ 30cd^2\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 60acd\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 15bcd\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$- 90c^2\begin{vmatrix} -11 & 6c \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 360ac\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 90bc\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ -11 & 6c \end{vmatrix}$$

$$+ 105bc^2\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ 5d & -11 \end{vmatrix} + 210bcd\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 5d & -11 \end{vmatrix} - 105b^2c\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 4b & 5a \end{vmatrix}$$

$$+ 30c^3\begin{vmatrix} 4b & 5a \\ -11 & 6c \end{vmatrix} - 60c^2d\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ -11 & 6c \end{vmatrix} + 120ac^2\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 4b & 5a \end{vmatrix}$$

$$-40ad^2\begin{vmatrix}8c&4b\\5d&-11\end{vmatrix}+60acd\begin{vmatrix}4b&5a\\5d&-11\end{vmatrix}-20abd\begin{vmatrix}4b&5a\\8c&4b\end{vmatrix}$$

$$+120ac\begin{vmatrix}8c&4b\\5d&-11\end{vmatrix}+360ac\begin{vmatrix}3a&2b\\5d&-11\end{vmatrix}-120ab\begin{vmatrix}3a&2b\\8c&4b\end{vmatrix}$$

$$-40a^2c\begin{vmatrix}4b&5a\\5d&-11\end{vmatrix}-80a^2d\begin{vmatrix}3a&2b\\5d&-11\end{vmatrix}+40a^2b\begin{vmatrix}3a&2b\\4b&5a\end{vmatrix}$$

$$+40ac^2\begin{vmatrix}4b&5a\\8c&4b\end{vmatrix}+80acd\begin{vmatrix}3a&2b\\8c&4b\end{vmatrix}-120ac^2\begin{vmatrix}3a&2b\\4b&5a\end{vmatrix}$$

$$+8bd^2\begin{vmatrix}8c&4b\\-11&6c\end{vmatrix}-12bcd\begin{vmatrix}4b&5a\\-11&6c\end{vmatrix}+16abd\begin{vmatrix}4b&5a\\8c&4b\end{vmatrix}$$

$$-24bc\begin{vmatrix}8c&4b\\-11&6c\end{vmatrix}-72bc\begin{vmatrix}3a&2b\\-11&6c\end{vmatrix}+96ab\begin{vmatrix}3a&2b\\8c&4b\end{vmatrix}$$

$$+8abc\begin{vmatrix}4b&5a\\-11&6c\end{vmatrix}+16abd\begin{vmatrix}3a&2b\\-11&6c\end{vmatrix}-32a^2b\begin{vmatrix}3a&2b\\4b&5a\end{vmatrix}$$

$$-28b^2c\begin{vmatrix}4b&5a\\8c&4b\end{vmatrix}-56b^2d\begin{vmatrix}3a&2b\\8c&4b\end{vmatrix}+84b^2c\begin{vmatrix}3a&2b\\4b&5a\end{vmatrix}$$

14. $$153\begin{vmatrix}31&5\\20&41\end{vmatrix}-108\begin{vmatrix}27&5\\18&41\end{vmatrix}+63\begin{vmatrix}27&31\\18&20\end{vmatrix}-154\begin{vmatrix}31&5\\20&41\end{vmatrix}$$

$$+168\begin{vmatrix}10&5\\3&41\end{vmatrix}-98\begin{vmatrix}10&31\\3&20\end{vmatrix}+143\begin{vmatrix}27&5\\18&41\end{vmatrix}-221\begin{vmatrix}10&5\\3&41\end{vmatrix}$$

$$+91\begin{vmatrix}10&27\\3&18\end{vmatrix}-253\begin{vmatrix}27&31\\18&20\end{vmatrix}+391\begin{vmatrix}10&31\\3&20\end{vmatrix}-276\begin{vmatrix}10&27\\3&18\end{vmatrix}$$

$$-1632\begin{vmatrix}31&5\\20&41\end{vmatrix}+1152\begin{vmatrix}27&5\\18&41\end{vmatrix}-672\begin{vmatrix}27&31\\18&20\end{vmatrix}+1428\begin{vmatrix}31&5\\20&41\end{vmatrix}$$

$$-1008\begin{vmatrix}2&5\\4&41\end{vmatrix}+588\begin{vmatrix}2&31\\4&20\end{vmatrix}-1326\begin{vmatrix}27&5\\18&41\end{vmatrix}$$

$$+1326\begin{vmatrix}2&5\\4&41\end{vmatrix}-546\begin{vmatrix}2&27\\4&18\end{vmatrix}+2346\begin{vmatrix}27&31\\18&20\end{vmatrix}$$

$$-2346\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}+1656\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}+2112\begin{vmatrix} 31 & 5 \\ 20 & 41 \end{vmatrix}-2304\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 41 \end{vmatrix}$$

$$+1344\begin{vmatrix} 10 & 31 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}-1836\begin{vmatrix} 31 & 5 \\ 20 & 41 \end{vmatrix}+1296\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 41 \end{vmatrix}$$

$$-756\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 40 \end{vmatrix}+2652\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 41 \end{vmatrix}-1716\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 41 \end{vmatrix}+1092\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-4692\begin{vmatrix} 10 & 31 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}+3036\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}-3312\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-2640\begin{vmatrix} 27 & 5 \\ 18 & 41 \end{vmatrix}$$

$$+4080\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 41 \end{vmatrix}-1680\begin{vmatrix} 10 & 27 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}+2295\begin{vmatrix} 27 & 5 \\ 18 & 41 \end{vmatrix}$$

$$-2295\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 41 \end{vmatrix}+945\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}-3570\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 41 \end{vmatrix}+2310\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 41 \end{vmatrix}$$

$$-1470\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+5865\begin{vmatrix} 10 & 27 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}-3795\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}+5865\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+1408\begin{vmatrix} 27 & 31 \\ 18 & 20 \end{vmatrix}-2176\begin{vmatrix} 10 & 31 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}+1536\begin{vmatrix} 10 & 27 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}-1224\begin{vmatrix} 27 & 31 \\ 18 & 20 \end{vmatrix}$$

$$+1224\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}-864\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}+1904\begin{vmatrix} 10 & 31 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}-1232\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}$$

$$+1344\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-1768\begin{vmatrix} 10 & 27 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}+1144\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}-1768\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

15. Décomposant d'abord en mineurs du premier ordre, on obtient :

$$-w_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 \end{vmatrix} +w_2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 \end{vmatrix} -w_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 \end{vmatrix}$$

$$+w_4\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 \end{vmatrix} - w_5\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 \end{vmatrix} + w_6\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 \end{vmatrix}$$

Le premier, décomposé en mineurs du second ordre, donne :

$$-w_1v_2\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix} + w_1v_3\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix} - w_1v_4\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}$$

$$+w_1v_5\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix} - w_1v_6\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}.$$

Le premier mineur du second ordre décomposé en mineurs de 4 éléments donne :

$$+w_1\,v_2\,u_3\,z_4\begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} - w_1\,v_2\,u_3\,z_5\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} + w_1\,v_2\,u_3\,z_6\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}$$

$$-w_1\,v_2\,u_4\,z_3\begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} + w_1\,v_2\,u_4\,z_5\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} - w_1\,v_2\,u_4\,z_6\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}$$

$$+w_1\,v_2\,u_5\,z_3\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} - w_1\,v_2\,u_5\,z_4\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} + w_1\,v_2\,u_5\,z_6\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$-w_1\,v_2\,u_6\,z_3\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + w_1\,v_2\,u_6\,z_4\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} - w_1\,v_2\,u_6\,z_5\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}.$$

En achevant la décomposition, on trouvera en tout 360 mineurs de quatre éléments.

XCI

1. Multiplication des déterminants.

1. $\begin{vmatrix} a_1\alpha + b_1\beta, a_1\gamma + b_1\delta \\ a_2\alpha + b_2\beta, a_2\gamma + b_2\delta \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x_1m_1 + y_1n_1, x_1m_2 + y_1n_2 \\ x_2m_1 + y_2n_1, x_2m_2 + y_2n_2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 3x + 5y, 3z + 5u \\ 4x + 13y, 4z + 13u \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 74 & 79 \\ 79 & 100 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 125 & 461 \\ 131 & 260 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} -\sin^2 a + 1, & \dfrac{\sin^2 a}{\sin b} - \cos a \\ -\sin^2 b + \dfrac{\cos^2 b}{\cos a}, & \sin b - \cos^2 b \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 24 & 140 & -209 \\ 159 & 54 & 39 \\ 150 & 87 & 39 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 59 & 105 & 123 & 165 \\ 61 & 89 & 103 & 151 \\ 101 & 172 & 201 & 278 \\ 104 & 217 & 253 & 323 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 11 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 23 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 211 & 112 \\ 6 & 171 & 160 \\ 5 & 366 & 224 \end{vmatrix}$.

10. Le premier déterminant donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & 11 & 21 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & -2 & -24 & 7 \\ 0 & 17 & 29 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ -2 & -24 & 7 \\ 17 & 29 & 17 \end{vmatrix}; \text{ d'où}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ -2 & -24 & 7 \\ 17 & 29 & 17 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & \frac{1}{3} & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 55 & 37 & 24 \\ -55 & -5 & 52 \\ 226\frac{1}{2} & 228 & 264\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 55 & 37 & 24 \\ -55 & -5 & 13 \\ 1359 & 1368 & 1588 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -172 & -83 & 13 \\ -2214 & -1014 & 397 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 89 & 1045 \\ 1200 & 13681 \end{vmatrix}; \quad \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 89 & 1045 \\ 1200 & 13681 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 5492 & 12118 \\ 72005 & 158891 \end{vmatrix} = 48521\tfrac{1}{3}.$$

11. $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

XCII

5. Calcul des déterminants.

1. 38. **2.** —1. **3.** 15. **4.** $25\frac{19}{30}$. **5.** $124\frac{11}{18}$. **6.** $41\frac{3}{4}$.

7. — 144. **8.** $\frac{160ay - 63bx}{420}$. **9.** 31. **10.** $a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2$.

11. 294. **12.** $2x^2$. **13.** 196.

14. $a_1^m(a_2^n a_3^p - a_3^n a_2^p) - a_2^m(a_1^n a_3^p - a_3^n a_1^p)$
$+ a_3^m(a_1^n a_2^p - a_2^n a_1^p)$.

15. Du paragraphe LXXXVII :

1. $a_1(b_2c_3 - b_3c_2)$. *2.* $y_1(x_3z_2 - x_2z_3)$. *3.* $c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$.

4. $a_2^3(a_3^1 a_1^2 - a_1^1 a_3^2)$. *5.* — 104. *6.* 100. *7.* — 240.

8. — 154. *9.* $a^2b^2(b^2 - a^2)$. *10.* —612.

11. $a_1 d_4(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 d_4(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 d_4(b_1 c_2 - b_2 c_1)$.

12. 648. *13.* $x_3 z_2(7y_4 - 11y_1)$. *14.* — 1848.

16. Du paragraphe LXXXV :

11. 756. *12.* — 63000. *13.* 0. *14.* — 628 320. *15.* $-106\frac{1}{9}$.

18. $30\{-2a(3b_2k + 20c_2e) - 2a_2(3bk - 8ce) + 7bcd(5c + 2b).\}$

19. 198. *20.* 13 860. *21.* $\frac{1}{40}$.

22. $\frac{1}{20}\left\{-2a(25b^3 - cy) - 45a^2(50b + cy) + 60bcz(2 + b^2)\right\}$.

23. $-x^2y^2(x - y) - x^2z^2(x - z) - y^2z^2(y - z)$.

24. $mxy(y - x)\{xy - m(y + x) + n\}$. *25.* 174.

26. $-\frac{39}{70}$.

27. $b^2c^3d^3(d-c) - b^3c^2d^3(d-b) + b^3c^3d^2(b-c)$
$- a^2c^3d^3(d-c) + a^3c^2d^3(d-a) - a^3c^3d^2(c-a)$
$+ a^2b^3d^3(d-b) - a^3b^2d^3(d-a) + a^3b^3d^2(b-a)$
$- a^2b^3c^3(c-b) + a^3b^2c^3(c-a) - a^3b^3c^2(b-a)$.

28. 2539.

29. $24ab^2c^3d^3(15d-4c) - ab^3c^2d^3(3d-b) + ab^3c^3d^2(4c-10b)$
$- 3a^2bc^3d^3(15d-4c) + a^3bc^2d^3(15d-a) - 5a^3bc^3d^2(4c-a)$
$+ \frac{3a^2b^3cd^3}{2}(3d-2b) - 12a^3b^2cd^3(15d-a) + \frac{a^3b^3cd^2}{2}(10b-a)$
$- 6a^2b^3c^3d(4c-10b) + 240a^3b^2c^3d(4c-a)$
$- 2a^3b^3c^2d(10b-a)$.

30. $\begin{cases} 10ac^2 + ab^3c^4d^4 - 2abc^2d^4 - 5ac^4d^2 \\ + a^3bc^2d^4 + 5a^3cd^2 - 5a^3c^2d - a^3b^3cd^4 \\ + a^4bc^4d^2 + 2a^4bc^2d + 2a^4b^3c - a^4b^3c^4d - 2a^4bc^2 - 2a^4bcd^2 \\ + 15c^4d + 6bcd^4 - 3bc^4d^4 - 30c. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 24a^2z^2 + 6bz^3 + 21c^3y^3 - 3y^3z^5 - 3a^2bc^3 - 336 \\ + ab^2y^3z^2 + b^3c^3x^5 + 16b^2y^2 - 8b^2x^5z^2 - 2ab^3 - b^2c^3y^5 \\ + 56c^3x^5 + a^3bc^3 + c^3y^5z^3 - 7ac^3y^3 - bc^3x^5z^3 - 8a^2c^3y^2 \\ + 14ax^2 + x^7z^5 + a^2c^3x^2y^2 - 7c^3x^7 - a^3x^2z^2 - 2x^2y^2z^3. \end{cases}$

17. -82664. **18.** 8100. **19.** $4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$.

20. $2x^2y^2$. **21.** $(x+y+z)(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)$.

22. 32055.

23. Du paragraphe LXXXVII :

15. -11904. *16.* $-a_1d_5e_2(b_3c_4-b_4c_3)$. *17.* $a_1b_2c_3d_4e_5$.

24. Du paragraphe LXXXVIII :

9. -149. *10.* 7411. *11.* 2582. *12.* -15.

13. $abc^2 - c^2d - 2ac - 2b^2c + acd^2 - 2ad + 14c - 2bcd$
$- 24b - 4e + 8d + 4b^2e - 3a^2c + a^2e - 18 + 6bd$
$+ 18a + 3ed - 6d^2 - 3abe + 6ab - abde$.

14. $ayz - y^4z - a^2yz^2 - x^4yz^2 - a^2y^2z^2 - a^7x^2 + 2a^2xy$
$- 2x^3yz - 2a^4y^2 - a^3xy^2z + a^6z - a^2z^2 + ay^3z^2 + x^2z^3$
$+ a^2x^2y^2z - 2ax^2y + 2y^3z + 2a^3x^4 + a^5y^2 - a^3xy$
$+ a^4xyz + x^3y^2z.$

25. Du paragraphe XC :

10. $a_1b_2(y_3z_4 - y_4z_3) - a_1b_3(y_2z_4 - y_4z_2) + a_1b_4(y_2z_3 - y_3z_2)$
$- a_2b_1(y_3z_4 - y_4z_3) + a_2b_3(y_1z_4 - y_4z_1) - a_2b_4(y_1z_3 - y_3z_1)$
$+ a_3b_1(y_2z_4 - y_4z_2) - a_3b_2(y_1z_4 - y_4z_1) + a_3b_4(y_1z_2 - y_2z_1)$
$- a_4b_1(y_2z_3 - y_3z_2) + a_4b_2(y_1z_3 - y_3z_1) - a_4b_3(y_1z_2 - y_2z_1).$

11. $\alpha b(x_3y_4 - x_4y_3) - \alpha c(x_2y_4 - x_4y_2) + \alpha d(x_2y_3 - x_3y_2)$
$- \beta a(x_3y_4 - x_4y_3) + \beta c(x_1y_4 - x_4y_1) - \beta d(x_1y_3 - x_3y_1)$
$+ \gamma a(x_2y_4 - x_4y_2) - \gamma b(x_1y_4 - x_4y_1) + \gamma d(x_1y_2 - x_2y_1)$
$- \delta a(x_2y_3 - x_3y_2) + \delta b(x_1y_3 - x_3y_1) - \delta c(x_1y_2 - x_2y_1).$

12. 17 978.

13. $-3ab\{105abc + 96ab + 24acd - 108c^2 - 40a^3 - 56b^2d\}$
$+ 8b^2\{35b^2c - 8abd - 6ac^2 + 9c^2d - 8a^2b\}$
$- 8bc\{28b^2d - 20a^2d - 36c^2 + 12cd^2 - 48ab + 35abc\}$
$- 11b\{8abd - 15acd - 24bc + 8bd^2 - 36bc + 10a^2c\}.$

14. $-107\,077.$

26. $x_3^2x_2y_1 + x_1^2x_3y_2 + x_2^2x_1y_3 - x_1^2x_2y_3 - x_2^2x_3y_1 - x_3^2x_1y_2$
$+ x^2x_2y_3 + x_2^2x_3y + x_3^2xy_2 - x_3^2x_2y - x^2x_3y_2 - x_2^2xy_3$
$+ x_3^2x_1y + x^2x_3y_1 + x_1^2xy_3 - x^2x_1y_3 - x_1^2x_3y - x_3^2xy_1$
$+ x^2x_1y_2 + x_1^2x_2y + x_2^2xy_1 - x_2^2x_1y - x^2x_2y_1 - x_1^2xy_2$
$+ y_3^2x_2y_1 + y_1^2x_3y_2 + y_2^2x_1y_3 - y_1^2x_2y_3 - y_2^2x_3y_1$
$- y_3^2x_1y_2 + y^2x_2y_3 + y_2^2x_3y + y_3^2xy_2 - y_3^2x_2y - y^2x_3y_2$
$- y_2^2xy_3 + y_3^2x_1y + y^2x_3y_1 + y_1^2xy_3 - y^2x_1y_3 - y_1^2x_3y$
$- y_3^2xy_1 + y^2x_1y_2 + y_1^2x_2y + y_2^2xy_1 - y_2^2x_1y - y^2x_2y_1$
$- y_1^2xy_2.$

27. $x\{2u^5(3z^3 + a^2) - \frac{1}{2}u(2u^5 - y^4) + 3u^2z^4 + \frac{1}{2}u^8$
$+ 3z(z^3 + a^2) - 2y^4z^3\}$
$-x^2\{2u^5y - u^2(2u^5 - y^4) + 3u^2z^2 + u^9 + 3yz + 2z(2u^5 - y^4)\}$
$+ x^4\{-2yz^3 - u^2(z^3 + a^2) + \frac{1}{2}u^3z - u^4z^3 + \frac{1}{2}uy + 2z(z^3 + a^2)\}$
$+ (1 + x^3)\{-3yz^4 + u^7(z^3 + a^2) - \frac{1}{2}uz(2u^5 - y^4)$
$+ u^2z^3(2u^5 - y^4) - \frac{1}{2}u^6y + 3z^2(z^3 + a^2)\}$.

28. $x_2y_3z_4 + y_2z_3x_4 + z_2x_3y_4 - z_2y_3x_4 - x_2z_3y_4 - y_2x_3z_4$
$+ z_1y_3x_4 + x_1z_3y_4 + y_1x_3z_4 - x_1y_3z_4 - y_1z_3x_4 - z_1x_3y_4$
$+ x_1y_2z_4 + y_1z_2x_4 + z_1x_2y_4 - z_1y_2x_4 - x_1z_2y_4 - y_1x_2z_4$
$+ z_1y_2x_3 + x_1z_2y_3 + y_1x_2z_3 - x_1y_2z_3 - y_1z_2x_3 - z_1x_2y_3$.

29. $a_0\{a_0a_3^2 + 4a_2^3 - 5a_1a_2a_3\}$
$+ a_1\{4a_1^2a_3 + aa_1a_2 - 4a_1a_2^2 - a_0aa_3\}$.

30. $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$.

31.
$$D = \begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & 0 & c^2 \\ 0 & (b+c)^2 - a^2 & a^2 \\ b^2 - (c+a)^2 & b^2 - (c+a)^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ b-c-a & b-c-a & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ a & c & -ac \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{ac}(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (a+b)c & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)a & a^2 \\ 0 & 0 & -ac \end{vmatrix}$$

$$= 2ac(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b & c \\ a & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

32. $\beta^2(\beta^2 - a^2 - b^2 - c^2)$.

33. $a_0^2(a_0 b_3^2 + 9a_2 b_2^2 - 6a_2 b_1 b_3 - 6a_1 b_2 b_3)$
$+ 3a_0 b_1(4a_1^2 b_3 + 3a_2^2 b_1 - 6a_1 a_2 b_2)$
$- 6a_0 b_0(a_2^2 b_2 - a_1 a_2 b_3) - 2a_1 b_0(4a_1^2 b_3 + 3a_2^2 b_1 - 6a_1 a_2 b_2)$
$+ a_2^3 b_0^2$.

34. $n + 1$.

35. $(1 + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta) - \cos^2\alpha\sin^2\delta$,
ou : $\sin^2\alpha\sin^2\delta - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$.

XCIII

6. Application des déterminants.

1. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 40 & 4 \\ 27 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = 4;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 40 \\ 5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = 7.$

2. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 36 & 2 \\ 47 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}} = 2;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 36 \\ 4 & 47 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}} = 3.$

3. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 14 & -6 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 14 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 14 & -6 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{3}.$

4. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 129 & 6 \\ 103 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = 9;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 129 \\ 9 & 103 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = 11.$

5. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -25 & -5 \\ 18 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = 10;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -25 \\ 7 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = 13.$

6. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 25 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}} = 1;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 25 \\ 15 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}} = 9.$

7. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -3\frac{1}{7} \\ 32\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4\frac{2}{5} & -3\frac{1}{7} \\ 3 & 2\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = 5;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4\frac{2}{5} & 0 \\ 3 & 32\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4\frac{2}{5} & -3\frac{1}{7} \\ 3 & 2\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = 7.$

8. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 107 & 2\frac{2}{7} \\ 66 & 5\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\frac{1}{4} & 2\frac{2}{7} \\ -7\frac{1}{3} & 5\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = 12;\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3\frac{1}{4} & 107 \\ -7\frac{1}{3} & 66 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\frac{1}{4} & 2\frac{2}{7} \\ -7\frac{1}{3} & 5\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = 28.$

9. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 33 & 2 & 4 \\ 48 & 1 & 9 \\ 70 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}} \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 33 & 4 \\ 5 & 48 & 9 \\ 7 & 70 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}} \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 33 \\ 5 & 1 & 48 \\ 7 & 4 & 70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}}$

$x = 7;\quad y = 4;\quad z = 1.$

10. $x = 4;\quad y = 3;\quad z = 7.$ 11. $x = 2;\quad y = 5;\ z = 6.$

12. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 11 \\ -5 & -1 & 10\frac{5}{7} \\ 43 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -13 & 3 & 11 \\ -6 & -1 & 10\frac{5}{7} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}};\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -13 & 7 & 11 \\ -6 & -5 & 10\frac{5}{7} \\ 1 & 43 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -13 & 3 & 11 \\ -6 & -1 & 10\frac{5}{7} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}};\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} -13 & 3 & 7 \\ -6 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 43 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -13 & 3 & 11 \\ -6 & -1 & 10\frac{5}{7} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}.$

$x = 10;\quad y = 20;\quad z = 7.$

13. $x = -17$; $y = 12$; $z = 8$.

14. $x = 40$; $y = 56$; $z = 21$.

15. $x = abcd$; $y = -(abc + abd + acd + bcd)$;
$z = ab + ac + ad + bc + bd + cd$;
$u = -(a + b + c + d)$.

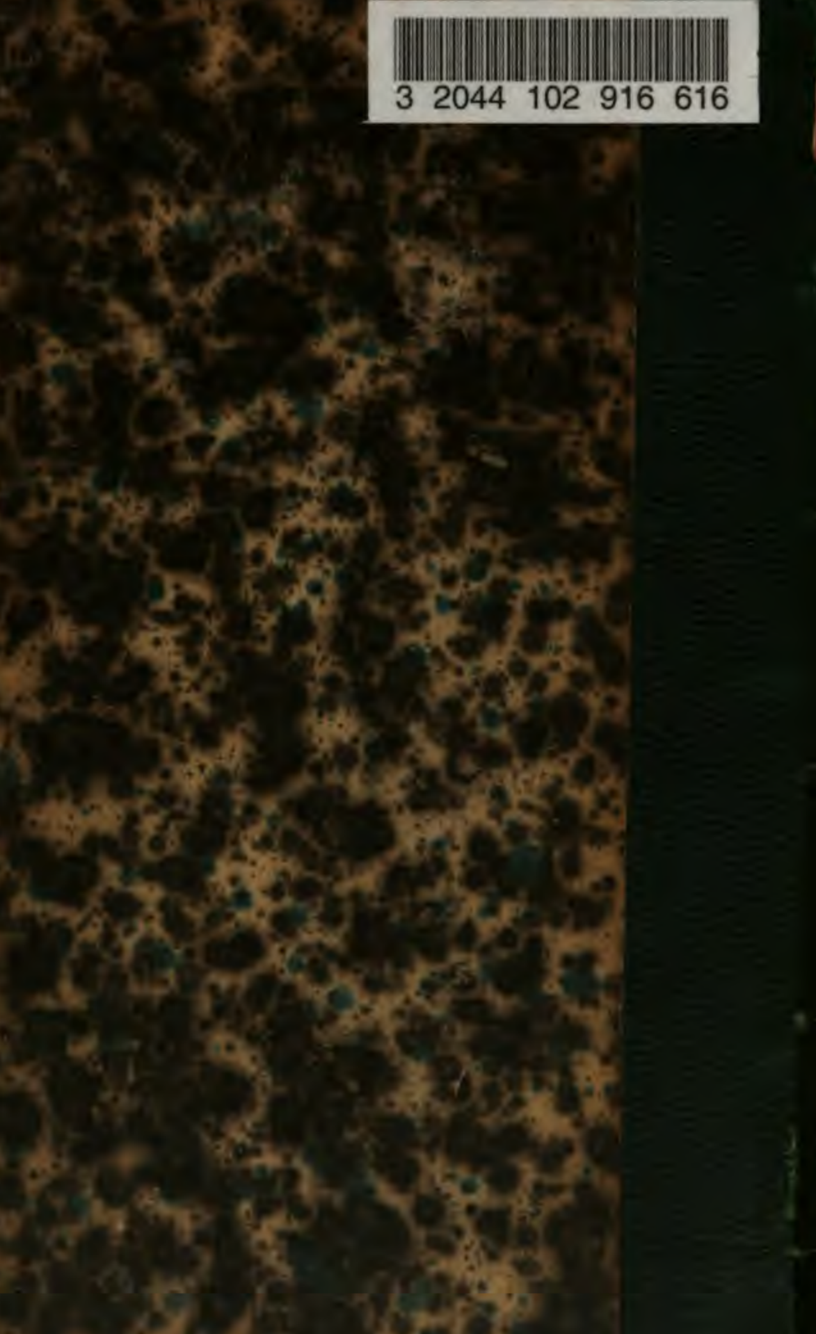
16. $x = a + b + c$; $y = b + c + d$; $z = c + d + e$;
$u = d + e + a$; $v = e + a + b$.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES




JAN 5 1887
SEP 8 1888


3 2044 102 916 616